**UNIVERSISTETI I PRISHTINËS "HASAN PRISHTINA"**
**FAKULTETI I INXHINIERISË MEKANIKE**
**DEPARTAMENTI KOMUNIKACION**
**STUDIMET MASTER**

# PUNIM MASTERI

**TEMA:**

# “ZBATIMI I ALGORITMIT DIJSKTRA NË GJETJEN E ZGJIDHJES OPTIMALE PËR RRJETIN E RRUGËVE LIDHËSE DERI NË QENDËR TË GJILANIT”

**Mentori:** **Prof.asc.Dr. Ramë LIKAJ**

**Kandidate:** **Bsc. Arjetë BLLACA**

**Prishtinë, 2018**

# *“*ZBATIMI I ALGORITMIT DIJSKTRA NË GJETJEN E ZGJIDHJES OPTIMALE PËR RRJETIN E RRUGËVE LIDHËSE DERI NË QENDËR TË GJILANIT*”*

Përgatitur nga Arjetë MILAIM BLLACA

Cernicë, 60000 GJILAN

Nr.ID: 151415

Punimi i masterit i paraqitur në

Fakultetin e Inxhinierisë Mekanike

Universiteti i Prishtinës "Hasan Prishtina"

Në përputhje të plotë me kërkesat

Për Gradën "Master i Shkencës në departamentin e Komunikacionit"

Dekan: Dr.Sc. Ahmet SHALA

**Komisioni:**

| | |
|---|---|
| **Prof.asc.Dr. Ahmet SHALA** | **(Kryetar)** |
| **Prof. asc.Dr. Ramë LIKAJ** | **(Mentor)** |
| **Prof.asc.Dr.Azem KYÇYKU** | **(Anëtar)** |

# FALËNDERIME DHE MIRËNJOHJE

Së pari falënderoj Zotin që më dha shëndetin dhe të gjitha mundësitë për të arritur deri këtu.

Një falënderim special i dedikoj mentorit tim **Prof.asc.Dr. Ramë LIKAJ**, për ndihmën, për këshillat, për mbështetjen, për konsulencën e tij të përpiktë e profesionale që më ofroi gjatë këtij rrugëtimi.

Falënderoj shoqet, koleget dhe të gjithë miqtë e mi që më kanë qëndruar pranë. Faleminderit për mbështetjen dhe durimin e vazhdueshëm. Ju jam shumë mirënjohëse për këtë.

Falënderim dhe mirënjohje e veçantë shkon për familjen time, të cilët në çdo hap ishin pranë meje, që pa ndihmën e tyre nuk do të arrija në përfundim të këtij studimi.

Të fundit, por më të rëndësishmit që u jam mirënjohëse, janë prindërit e mi. Mbështetja e vazhdueshme shpirtërore, morale dhe financiare e tyre, më ka dhënë forcën dhe motivimin për të finalizuar këtë punim. Pa ta asgjë nuk do të kishte qenë e mundur.

# *Dedikuar*

Këtë punim diplome ua dedikoj atyre,

së cilës i detyrohem jashtëzakonisht shumë.

Familjes time....

# PËRMBLEDHJE (ABSTRAKT)


Problemi i këtij studimi është zbatimi i algoritmit Dijsktra për gjetjen e zgjidhjes optimale në rrjetin e rrugëve lidhëse deri në qendër të Gjilanit. Që është një nga qytetet më të mëdha të vendit, që gjendët në pjesën juglindore të Kosovës, rajoni i Anamoravës.

Gjatë analizimit apo zbatimit të algoritmeve për gjetjen e një zgjidhje sa më optimale, fillimisht bëhet përshkrimi i qytetit si kulme dhe rrugëve si degë të grafit. Pesha e degëve mund të ketë si atribut gjatësinë e rrugëve.

Në këtë punim është analizuar rrjeti i rrugëve: *"Nënë Tereza", "Halim Orana", "Idriz Seferi",* dhe *"Marie Shllaku"* që kanë destinacion qendrën e qytetit, konkretisht deri te rrethi i madh.

Në këtë punim përshkruhet puna në mënyrë të detajuar e algoritmit Kruskal për gjetjen e pemës minimale në rrjetin e rrugëve lidhëse në qytetin e Gjilanit, gjetja e rrugëve me gjatësi minimale dhe maksimale në rrjetin e rrugëve lidhëse për katër stacione të ndryshme deri në qendër të qytetit duke zbatuar algoritmin Dijsktra. Gjithashtu, për këtë rast është analizuar dhe realizuar gjetja e rrugëve me kosto të shpenzimeve minimale dhe maksimale. Rezultatet e fituara me algoritëm Dijsktra për gjetjen e rrugës me gjatësi minimale dhe me kosto të shpenzimeve minimale do të verifikohen me softverin Matlab dhe bëhet krahasimi në mes algoritmit Dijsktra dhe softverit Matlab.

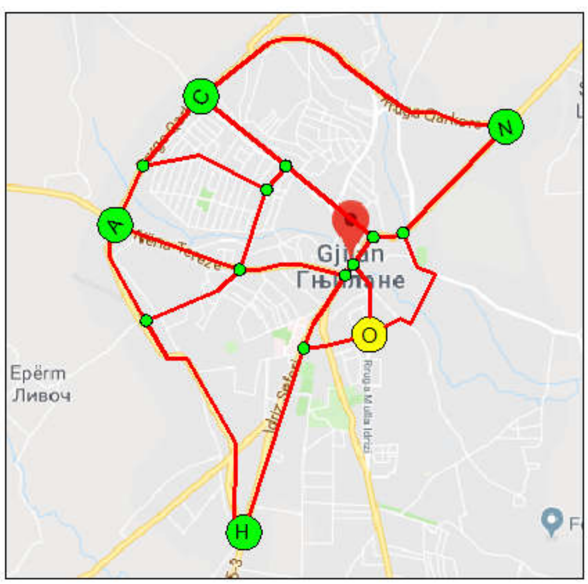




*Figura.1.0. Rrjeti rrugor i marrë për shqyrtim.*

# PËRMBAJTJA E TEMËS SË MASTERIT

# HYRJE

Në teorinë e algoritmeve dhe strukturave të të dhënave janë bërë studime të mirëfillta për gjetjen e rrugës më të shkurtër nga një kulm i grafit dhe midis të gjithë çifteve të kulmeve të grafit.

Problemin e gjetjes së rrugës më të shkurtër sot e gjejmë të aplikueshëm në shumë raste, dhe studimi i detajuar i këtij problemi jep mundësi për gjetjen e algoritmeve kualitative. Për gjetjen e distancës më të shkurtër mes dy nyjeve është një problem klasik në teorinë e grafeve. Në varësi të natyrës së problemit, ka lloje të ndryshme të problemeve të distancës më të shkurtër.

Disa nga rastet ku është e nevojshme të gjenden rrugët më të shkurtëra janë: përshkrimi i qyteteve si kulme dhe rrugëve si degë të grafit. Degët lidhëse që lidhin dy nyjet tregojnë gjatësinë, relacionet e pikave të territorit, ose komponente të ndryshme fizike, ose aktivitete të një sistemi që ekziston ndërmjet tyre, ose relacion të një tipi të caktuar. Pesha e degëve mund të ketë atribut: gjatësinë, kohën, çmimin, pra për të njëjtin graf mund të vështrojmë shtigje të ndryshme për atribute të ndryshme të degëve të tij. Në teorinë e algoritmeve dhe strukturave të të dhënave janë bërë studime të mirëfillta për gjetjen e rrugëve më të shkurtër nga një kulm i grafit dhe midis të gjithë çifteve të kulmeve të grafit. Në këtë punim për gjetjen e një zgjidhje optimale në rrjetin e rrugëve lidhëse në Gjilan përshkruajmë punën e algoritmit Kruskal dhe algoritmit Dijsktra. Rezultatet e fituara me algoritëm Dijsktra i verifikojmë me softverin Matlab.

## 1.1. IDENTIFIKIMI I DHE PËRSHKRIMI I PROBLEMIT

Në rrjetin rrugor në qytetin e Gjilanit duke u nisur për katër stacione të ndryshme që kanë destinacion qendrën e qytetit, duke pas parasysh se ka mjaftë rrugë alternative duke filluar nga burimi deri te destinacioni, problemi nuk është vetëm i gjetjes së rrugës me gjatësi minimale në mes dy kulmeve, por në raste tjera mund të jetë edhe kostoja e shpenzimeve minimale.

## 1.2. QËLLIMI I HULUMTIMIT

Në kuadër të punimit master me titull ***"Zbatimi i Algoritmit Dijsktra në gjetjen e zgjidhjes optimale për rrjetin e rrugëve lidhëse deri në qendër të Gjilanit",*** qëllimi i hulumtimit është studimi dhe analizimi i detajuar për gjetjen e rrugëve me gjatësi minimale dhe maksimale për katër stacione të ndryshme që kanë destinacion qendrën e qytetit, dhe të gjendet kosto e shpenzimeve minimale dhe maksimale. Qëllimi ynë kryesorë është që të jemi të aftë që të zgjedhim metoda për t'i implementuar ato, dhe për të analizuar vlefshmërinë e tyre.

## 1.3. PYETJET E HULUMTIMIT DHE HIPOTEZA

Në këtë temë, pyetjet të cilat parashtrohen gjatë hulumtimit e që janë me rëndësi të veçantë për nxjerrjen e përfundimeve me interes praktik janë:

1. Si bëhet gjetja e pemës minimale me Algoritëm Kruskal?

2. Si bëhet gjetja e rrugëve me gjatësi minimale me Algoritëm Dijsktra / Rruga më e shkurtër?

3. Si bëhet llogaritja e rrugëve me kosto të shpenzimeve minimale me Algoritëm Dijsktra?

4. Si bëhet gjetja e rrugëve me gjatësi maksimale me Algoritëm Dijsktra / Rruga më e gjatë?

5.Si bëhet llogaritja e rrugëve me kosto të shpenzimeve maksimale me Algoritëm Dijsktra?

## 1.4. HIPOTEZAT

Punimi është i bazuar në analizën dhe diskutimin e rezultateve të arritura të cilat bazohen në këto hipoteza:

- për analizën e mirëfilltë të një rrjeti rrugor duhet marrë në shqyrtim më shumë se një nyje të rrugëve,
- numri sa më i madh i nyjeve në rrjetin rrugor të shqyrtuar rritë besueshmërinë e studimit, por shton edhe ndërlikueshmërinë e analizës dhe ofrimit të propozimeve për zgjidhje,
- aplikimi i algoritmit Kruskal dhe algoritmit Dijsktra, për analizë në rrjetin rrugor ofrojnë rezultate të mirëfillta dhe të besueshme.

## 1.5. METODAT DHE TEKNIKAT E HULUMTIMIT

Gjatë shtjellimit të kësaj teme, në përgjithësi do të përdoren këto metoda dhe veprime të hulumtimit:

- shqyrtimi i detajuar i literaturës nga problematika e algoritmeve për zgjidhje optimale të rrjetit rrugor,
- analiza e diagrameve dhe komentimi i tyre me qëllim të nxjerrjes së përfundimeve me interes profesional dhe praktik,
- shfrytëzimi i programit AutoCad,
- aplikimi i softverit Matlab.

# 2.0. TEORIA E GRAFEVE

## 2.1. GRAFET

Grafet janë objekte matematikore që shërbejnë për modelimin e shumë problemeve në sistemin real. *Grafi* është objekt që në mënyrë më të lirshme mund të përkufizohet si bashkësi nyjesh (anglisht *vertex*) të lidhura ndërmjet vete, ashtu që lidhjet paraqesin relacionet përkatëse ndërmjet nyjeve të cilat quhen degë (anglisht *edge*).

Është e zakonshme në teorinë e grafeve që nyja dhe degët të shënohen me shkronjat e vogla të alfabetit latin: *a, b, c...* Në qoftë se dega *e* i lidhë nyjet *a* dhe *b*, ajo mund të shënohet si *e={a,b}* (në rast se nuk është e rëndësishme të theksohet kahja e degës dhe për një nocion të tillë do të bëhet fjalë më vonë) ose mund të shkruajmë shkurtimisht *e=ab.*

Kështu në *figurën 2.0.,* është paraqitur grafi që përbëhet nga nyjet *a,b,c,d* dhe *e* dhe me degët *ab,ad, ae, bd, be, bc, cd* dhe *de.*

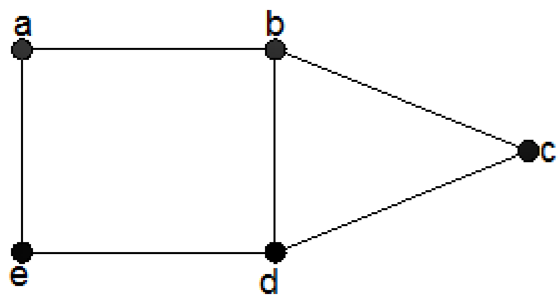



*Figura. 2.0. Shembull grafi.*

Grafet janë interesant, meqenëse nëpërmjet tyre në mënyrë shumë të thjeshtë mund të modelohen problemet e ndërlikuara nga sistemet reale. P.sh. në qoftë se shqyrtojmë një hartë gjeografike me një bashkësi të madhe qytetesh që janë të lidhura me anë të rrugëve - përfitojmë një graf, në mënyrë që nyjet e grafit janë në të vërtetë qytetet, kurse degët e grafit paraqesin rrugët ndërmjet qyteteve në atë hartë.

Themelimit të teorisë së grafeve i paraprinë një tregim interesant mbi matematikanin zviceran **Leonard Ojler.** Gjatë qëndrimit të tij në Kenigsberg (gjermanisht Kaonigsberg; Kaliningradi i sotëm), vendasit i kanë parashtruar problemin, nëse mund të kalohet nëpër 7 urat (që lidhin dy brigjet e lumit Pregel ndërmjet vete dhe me dy ishuj), ashtu që nëpër secilën nga ato ura të kalohet një dhe vetëm një herë. Ojleri ka dhënë përgjigje negative. Në figurën e mëposhtme është paraqitur harta e Kenigsbergut (nga koha e Ojlerit) me urat e tij. Ojleri secilit breg dhe secilit ishull i ka shoqëruar nyjet e grafit, urat ndërmjet tyre i ka paraqitur nëpërmjet degëve të grafit. Kështu ai ka përfituar një graf të paraqitur në figurë.

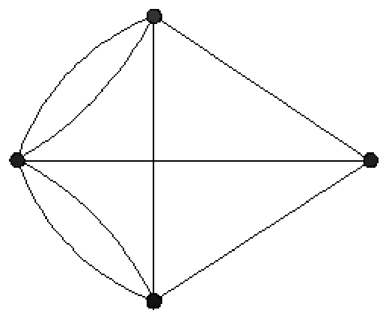


*Figura.2.1. Grafi i urave të Kenigsberg-ut.*

Ojleri me 26 gusht të vitit 1735 ka prezentuar punimin e vet në lidhje me këtë problem në akademinë e shkencave të Shën Petersburgut, duke vërtetuar se një përshkim (udhëtim) i tillë është i pamundshëm, dhe duke vërejtur se metoda e tij mund të zgjerohet në renditjen e çfarëdoshme të ishujve dhe urave. Më saktësisht, Ojleri ka formuluar kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme që një turne i tillë të ekzistojë, por nuk ka menduar se është e nevojshme të vërtetohen kushtet e mjaftueshme në rastin e përgjithshëm. Ojleri artikullin për problemin e urave të Kenigsbergut e ka shkruar në vitin 1736 (prandaj ai vit merret si pikënisje e themelimit të teorisë së grafeve) dhe artikulli është publikuar herën e parë në vitin 1741, mirëpo atëherë nuk ka zgjuar një interesim për matematikanët e tjerë të asaj kohe. Ky problem dhe rezultati përkatës kanë mbetur pak të njohur deri në fund të shekullit të 19-të, kur matematikanët anglezë Xhorxh Lukas (anglishtb *George Lucas,* 1882) dhe Raul Bol (anglisht *Rause Ball*, 1892) i kanë kyçur në librat e tyre mbi matematikën rekreative. Nocioni graf i ***Ojlerit për grafin*** që mund të vizatohet pa hequr lapsin nga letra është bërë i njohur falë Kenigut, i cili e ka shfrytëzuar në librin e tij fillestar mbi teorinë e grafeve (në vitin 1936).

## Grafet e orinetuar dhe te paorientuar

*Grafi* është një strukturë matematikore që përbëhet nga një bashkësi kulmesh dhe brinjësh që lidhin këto kulme. Formalisht brinjët trajtohen si çifte kulmesh, një brinje *(v, w)* lidhë kulmin *v* me kulmin *w*. Formalisht:

- *V* është bashkësia e kulmeve
- *E* është nënbashkesi e *V x V*

Shkruajmë *G = (V, E)* për të treguar që *G* është një graf me bashkësi kulmesh bashkësinë *V* dhe bashkësi brinjësh bashkësinë *E*. Grafi *G = (V, E)* është i paorientuar atëherë dhe vetëm atëherë kur në qoftë se për të gjitha kulmet *v, w* є *V*, (*v, w)* є *E* kemi *(w, v)* є *E*. Nga përkufizimi duket që grafet e paorientuara janë raste të veçanta të grafëve të orientuar.

Bashkësia *V* dhe rrjedhimisht edhe bashkësia *E* janë të pafundme. Grafe të tilla gjejnë përdorim në shumë fusha, megjithatë do të trajtojmë vetëm bashkësi të fundme *V*. Meqenëse *E* është nënbashkësi e *VxV* atëherë edhe *E* është e fundme.

Figura më poshtë paraqet një graf të orientuar me kulme dhe brinjë të përcaktuara nga bashkësitë:

*V = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} dhe*

*E = {(0, 2), (0, 4), (0, 5), (1, 0), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 6), (4, 0), (4, 5), (6, 3), (6, 5)}*

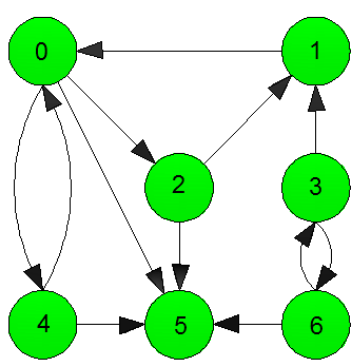



*Figura.2.2. Graf i orientuar.*

Në qoftë se $v \in V$ është një kulm në një graf të orientuar G=(V, E) atëherë:

- Rendi hyrës in($v$) i kulmit $v$ është numri i brinjëve hyrëse tek $v$, d.m.th. numri i brinjëve të trajtës $(v, u)$.
- Rendi dalës out($v$) i kulmit $v$ është numri i brinjëve dalëse nga $v$, d.m.th. numri i brinjëve $(v, u)$.

Në një graf të paorientuar, rendi i një kulmi $v$ është numri i brinjëve $e \in E$ për të cilat njëri kulm është $v$. Dy kulme janë *fqinje* nëse ka një brinjë që i lidhë ato.

Grafet janë modele matematikore që mund të përdoren në probleme të ndryshme. Grafet p.sh. përdoren për të zgjidhur probleme që kanë të bëjnë me kombinime të ndryshme të fluturimeve midis dy qyteteve në një rrjet ajror për të përcaktuar nëse është e mundur të përshkohen të gjitha rrugët e një qyteti pa kaluar dy herë në të njëjtën rrugë. Për të ndërtuar një graf mund të paraqesim një realitet të ç'farëdoshëm fizik. Nyjet që e përbëjnë grafin mund të tregojnë pikat fizike të një territori, ose komponente të ndryshme fizike të një sistemi, ose aktivitete të ndryshme të tij. Degët lidhëse që lidhin dy nyjet tregojnë relacionet e pikave të territorit, ose komponente të ndryshme fizike, ose aktivitete të një sistemi që ekziston ndërmjet tyre, ose relacion të një tipi të caktuar.

## 2.2. ALGORITMET

Njohja me algoritme zakonisht fillon me tregimin mbi matematikanin, astronomin dhe gjeografin persian të shekullit ***IX EL Horezmi*** (emri i tij i plotë në transmetim anglez është ***Muhammed ibn Musa al- Khwarizmi***). Në vitin 852 ka shkruar librin në të cilin ka përshkruar veprimet për llogaritjen në sistemin numëror indian. Origjinali në gjuhën arabe nuk është ruajtur, kurse emri në përkthimin latin është *"Algoritmi de numero Indorum"* ("Al-Khwarizmi mbi numrat indianë"). Si rrrjedhim, rregullat për të zgjidhur, në atë kohë kryesisht problemet matematikore, në bazë të emrit "al Khawarizmi" janë quajtur *algoritme*.

Me nocionin *algoritëm* sot nënkuptojmë vargje të veprimeve të sakta të cilat hap pas hapi na çojnë në zgjidhjen e problemit.

*Algoritmi* paraqet një bashkësi veprimesh që kryhen me rënditje të përcaktuar paraprakisht, me qëllim që nga të dhënat hyrëse të njehsohen rezultatet e kërkuara. Ato janë udhëzime aq të sakta që për kryerjen e tyre nuk nevojitet mësim apo mendim shtesë.

Algoritmin e parë për llogaritjen e ka shkruar Ada Bajron në vitin 1842. Bëhet fjalë mbi algoritmin për llogaritjen e numrave të Bernulit në makinën analitike të Çarlls Bebixhit. Ajo makinë nuk ka funksionuar kurrë, mirëpo algoritmi i saj ka lënë gjurmë të thella. Sot programi i Adës konsiderohet si programi i parë kompjuterik, kurse për nderë të Ada Bajronit, një nga gjuhët e programit ka marrë emrin Ada.

Avancim të rëndësishëm në formalizimin e futjës në përdorim të algoritmeve në matematikë dhe në logjikë më pas ka dhënë Alan Tjurin-gu, duke përkufizuar makinën e Tjurinut. Bëhet fjalë mbi një makinë imagjinare që mund të paraqesë të dhënat dhe në to të kryejë algoritmin. Edhe pse ka një strukturë të thjeshtë, kjo makinë është ekuivalente me të gjithë kompjuterët elektrikë dhe mekanikë.

Shumë autorë të teksteve, algoritmet i sqarojnë duke marrë kryesisht shembuj nga jeta e përditshme, të cilat kanë të bëjnë me kohën moderne informatike në të cilën jetojmë.

Më herët kemi mësuar procedurat (algoritmet) për mbledhjen dhe shumëzimin e numrave, algoritmin e Euklidit për përcaktimin e pjestuesit më të madh të përbashkët të dy numrave, algoritmin e Gausit për zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare dhe shumë shembuj të tjerë. Nga fizika kemi mësuar si të njehsojmë fuqinë e rrymës elektrike dhe rezistencën e përgjithshme në qarqet e rrymës me një drejtim dhe të rrymës alternative; nga kimia të sqarojmë reaksionet kimike. Algoritmet janë prezentë në secilën fushë të shkencës, dhe në jetën e përditshme jemi vazhdimisht në kontakt me to, dhe shpesh veprojmë sipas algoritmeve, por pa vetëdije. Është mirë që të mendosh në mënyrë “algoritmike”, pavarësisht se a merremi me programim apo jo.

### 2.2.1. Algoritmi Kruskal / Pema minimale (Minimum Spanning Tree)

**Pema minimale (minimum spanning tree)**

Pema përfshirëse është nëngrafi i një grafi të dhënë i tillë që nyjet e lidhura në graf janë të lidhura edhe në atë pemë. Pema minimale përfshirëse (anglisht *Minimum Spanning Tree*) është përfshirëse me peshën e përgjithshme minimale

Problemi i pemës minimale përfshirëse paraqitet në shumë probleme reale, p.sh. lidhja e nyjeve të rrjetit telefonik me më pak shpenzime (d.m.th. me gjatësinë e përgjithshme minimale të telit të nevojitur). Në këtë rast pesha e degës i përgjigjet distancës fizike të nyjeve.

Për kërkimin e pemës minimale përfshirëse ekzistojnë disa algoritme, prej të cilëve më i njohuri është algoritmi Kruskal.

**Algoritmi Kruskal**

Algoritmi Kruskal përbëhet nga hapat e më poshtëm:

1. Vendoset numëruesi $i=1$ dhe zgjidhet dega $e_1$ peshë minimale;
2. Në qoftë se për $1 \leq i \leq n-2$ janë zgjidhur degët $e_1, e_2, \ldots, e_i$, dega $e_{i+1}$ zgjidhet me këto kushte:
   a) $e_{i+1}$ ka peshë më të vogël,
   b) duke shtuar atë degë, nuk krijohet cikli së bashku me degët e zgjidhura paraprakisht.
3. Numëruesi $i$ zmadhohet për $1$. Në qoftë se $i = n-1$, algoritmi përfundon. Në të kundërten, kthehemi në hapin $2$.

Në qoftë se grafi është i lidhur, degët e shënuara përbëjnë pemën minimale përfshirëse**.** Në qoftë se grafi nuk është i lidhur, degët përbëjnë pyllin, d.m.th. secila pemë në pyll është pemë minimale përfshirëse për atë komponent të lidhshmërisë së grafit.

### 2.2.2. Algoritmi Dijsktra

Algoritmi Dijsktra (mori këtë emër pas zbulimit të tij, nga Edsger Wybe Dijsktra), algoritëm i cili zgjidhë problemin e gjetjes së rrugës më të shkurtër nga një kulm burim në një kulm destinacion. Algoritmet janë një manifestim natyral i arsyetimit logjik. Një algoritëm i mirë është si një fotografi e shkurtër në trajtimin e një problemi. Algoritmi ekziston në shumë variante. Në variantin origjinal Dijsktra zbuloi shtegun më të shkurtër midis dy nyjeve, por një variant më i zakonshëm ndreq një nyje të vetme si nyje “burim” dhe gjenë rrugët më të shkurtra nga burimi në të gjitha nyjet e tjera në graf duke prodhuar një pemë më të shkurtër të grafit. Për një nyje burimi të dhënë në graf, algoritmi gjenë rrugën më të shkurtër midis asaj nyje dhe çdo nyje tjetër. Ai gjithashtu mund të përdoret për gjetjen e shtigjeve më të shkurtra nga një nyje e vetme në një nyje tjetër të destinacionit.

**Si lindi Algoritmi Dijsktra?**

Në vitin 1956, shkencëtari kompjuterik holandez “Edsger Dijsktra” ishte duke punuar në ARMAC, një makinë paralele informatike e bazuar në qendrën matematike të Holandës. Ishte pasardhësi i makinave ARRA dhe ARRA II, të cilat ishin në thelb kompjuterët e parë të vendit. Në vitin 1959 u botua zbulimi i tij, algoritëm të cilin Dijsktra e projektoi për rreth 20 minuta. “Një nga arsyet që është kaq e bukur është se unë e kam projektuar atë pa laps dhe letër, pa laps dhe letër ju jeni pothuajse të detyruar të shmangni të gjitha kompleksitetet e shmangshme”, shprehet E.Dijsktra në një intervistë për projektimin e algoritmit me të njëjtin emër, që i dha edhe famën më të madhe. “Për të parë përmes kompleksitetit, duhet zgjuarsi”. Ishte pra, pikërisht pionieri i programimit E.W.Dijsktra që me të vërtetë e kuptoi kompleksitetin dhe algoritmi i tij mbetet një nga zbulimet më të zgjuara. Një avokat i pamëshirshëm i thjeshtësisë dhe elegancës në matematikë, ai pak a shumë besonte se çdo problem i ndërlikuar ishte i arritshëm, kishte një rrugë, dhe matematika ishte një mjet për të gjetur dhe shfrytëzuar atë.

**Përdorimi i Algoritmit Dijsktra**

Algoritmi Dijsktra fitoi popullaritet sepse ai ishte një nga algoritmet më të rëndësishme dhe më të dobishme në dispozicion për gjenerimin e zgjidhjeve optimale (të sakta) për një klasë të madhe të problemeve mbi gjetjen e rrugës më të shkurtër. Kjo klasë e problemeve është shumë e rëndësishme teorikisht dhe praktikisht . Në thelb, çdo problem optimizues kombinatorësh mund të formulohet si një problem i rrugës më të shkurtër. Kështu, kjo klasë e problemeve është jashtëzakonisht e madhe dhe përfshin shumë probleme praktike që nuk kanë të bëjnë me problemet aktuale “të vërteta” të rrugës më të shkurtër. Klasat e reja të problemit të rrugëve të vërteta më të shkurtra po bëhen shumë të rëndësishme këto ditë në lidhje me aplikimet praktike të sistemeve të informacionit gjeografik (GIS), si p.sh. llogaritja në internet e udhëzimeve të vozitjes. P.sh., Microsoft ka një projekt hulumtimi mbi algoritme për problemet e rrugës më të shkurtër.

**Funksioni i kostos**

Kostoja (e përgjithshme) e kalimit të një harku në graf në një sistem transporti është elementi që lejon të kalohet nga grafi. Në përgjithësi, në rrjetet e transportit privat ku në shumë raste qarkullojnë edhe rrjete publike, kostoja e kalimit të një harku është një relacion matematikor që jep ose përfaqëson koston mesatare të transportit për fluksin, sigurisht që varet nga numri i përdoruesve që e përdorin harkun por dhe harqe të tjerë të rrjetit. Komponentët që përbëjnë koston e kalimit të një harku, janë kompleks, por ne i përafrojmë në një limit duke i konsideruar si të homogjenizuara, dhe i vetmi faktor viziv mbetet koha, për të cilën vlerësohet si një kohë mesatare e harkut. Në fakt, kjo kohë prezantohet në kohën e lëvizjes urbane dhe kohën e lëvizjes extraurbane, kjo e fundit përfshin nocionet e ndërhyrjes me rrjetet tjera.

# 3.0. APLIKIMI I ALGORITMIT KRUSKAL NË GJETJEN E PEMËS MINIMALE ( MINIMUM SPANNING TREE) NË RRJETIN E RRUGËVE LIDHËSE NË GJILAN

Në këtë punim në gjetjen e pemës minimale në rrjetin e rrugëve lidhëse në qytetin e Gjilanit aplikojmë algoritmin Kruskal. Së pari rrjetin rrugor të qytetit e shëndrrojmë në graf. Në graf fillojmë nga kulmi me distancë më të shkurtë. Me grafin e mbetur vazhdojmë në të njëjtën mënyrë deri sa në graf të mos formohen cikle. Kuptohet që grafi që mbetet në fund është pema minimale e kërkuar.

Në figurën më poshtë është paraqitur rrjeti i rrugëve lidhëse në Gjilan i marrë për analizë.

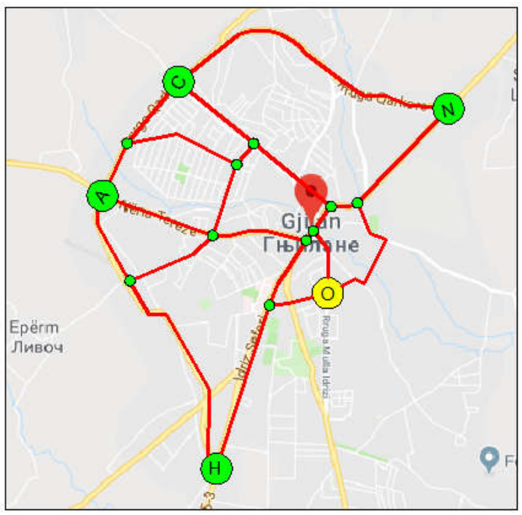



*Figura 3.0. Rrjeti rrugor i qytetit të Gjilanit.*

Rrjeti rrugor i qytetit i shëndrruar në graf.

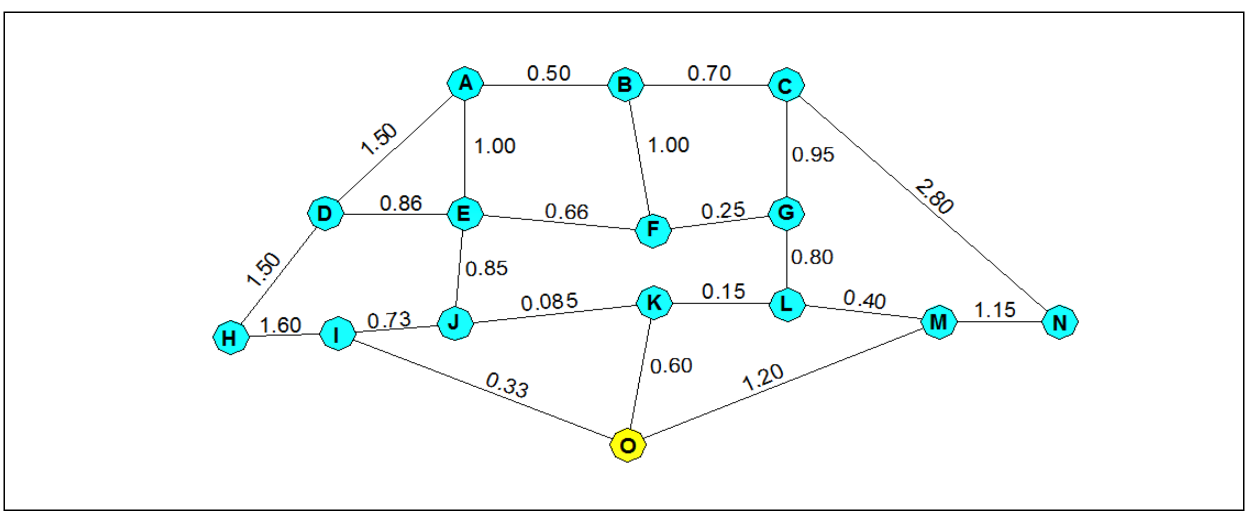



*Figura 3.1. Graf i lidhur.*

Grafi përmban 15 kulme dhe 22 degë.

Në tabelë paraqesim gjithë kulmet e grafit si dhe distancën ndërmjet tyre, radhitja bëhet duke filluar nga distanca më e shkurtë. Cekim se distanca është shprehur në kilometra [km].

| **Kulmet** | **Distanca** |
|---|---|
| J,K | 0.0085 |
| K,L | 0.15 |
| F,G | 0.25 |
| I,O | 0.33 |
| L,M | 0.40 |
| A,B | 0.50 |
| O,K | 0.60 |
| E,F | 0.66 |
| B,C | 0.70 |
| I,J | 0.73 |
| G,L | 0.80 |
| E,J | 0.85 |
| D,E | 0.86 |
| C,G | 0.95 |
| A,E | 1.00 |
| B,F | 1.00 |
| M,N | 1.15 |
| M,O | 1.20 |
| A,D | 1.50 |
| D,H | 1.50 |
| H,I | 1.60 |
| C,N | 2.80 |

*Tabela.1.0. Distanca e kulmeve.*

Rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit J-K me gjatësi 0.085, e cila nuk formon cikël.

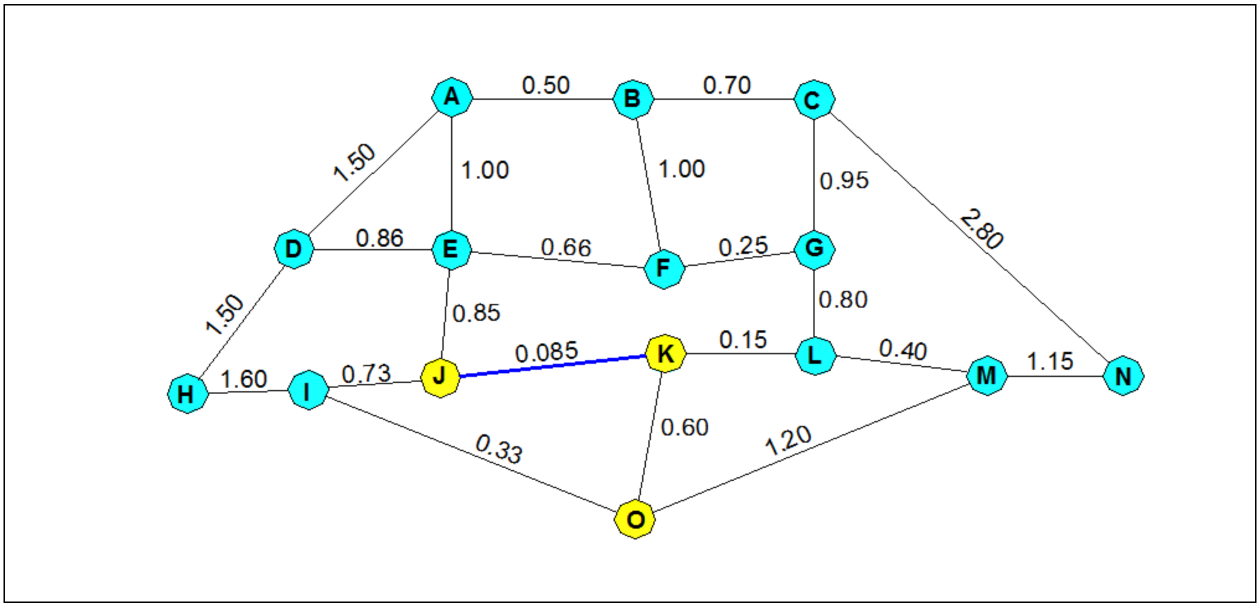



*Figura 3.2. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Rruga tjetër me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit K-L me gjatësi 0.15, e cila nuk formon cikël.

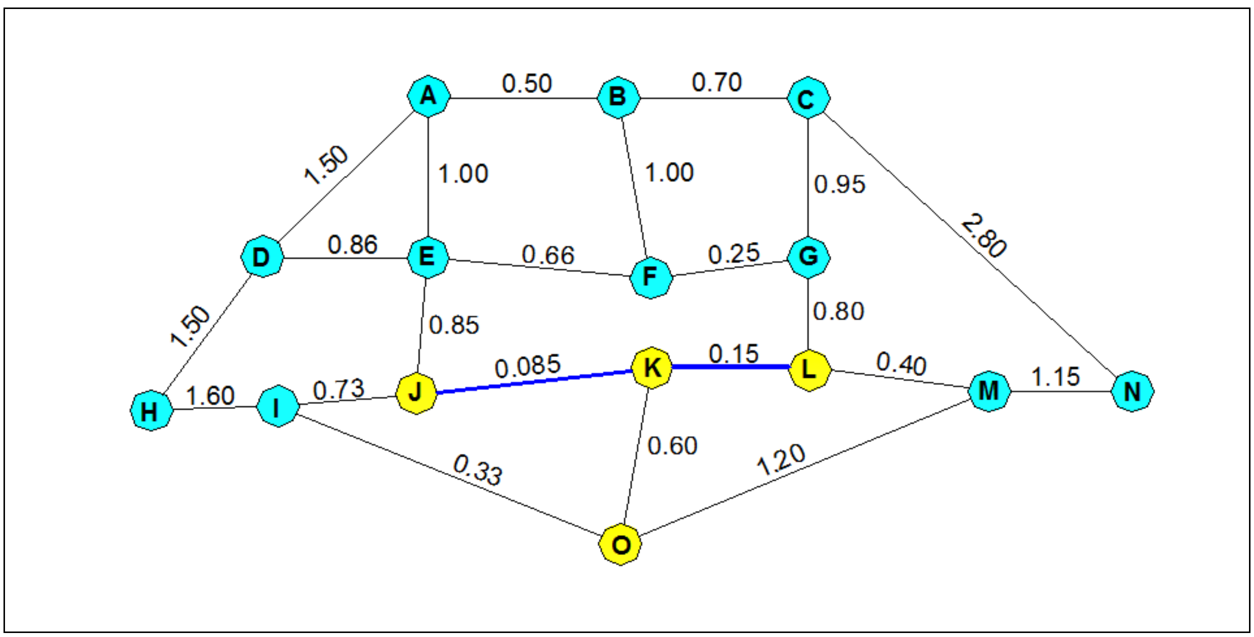



*Figura 3.3. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit F-G me gjatësi 0.25, e cila nuk formon cikël.

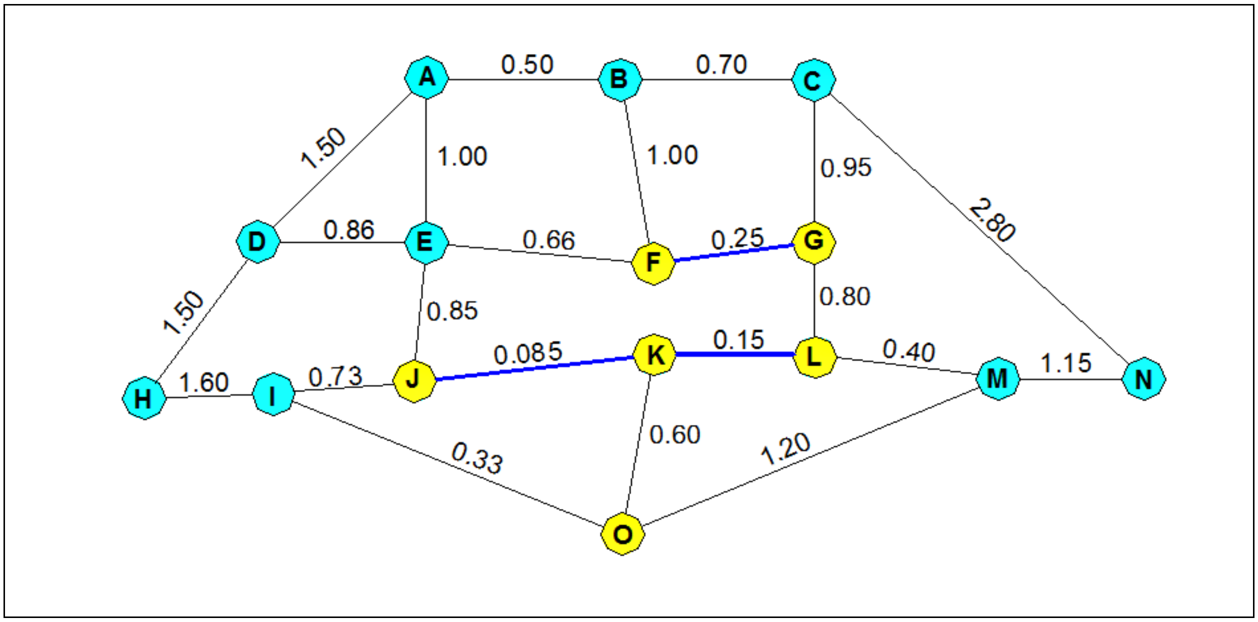



*Figura 3.4. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit I-O me gjatësi 0.33, e cila nuk formon cikël.

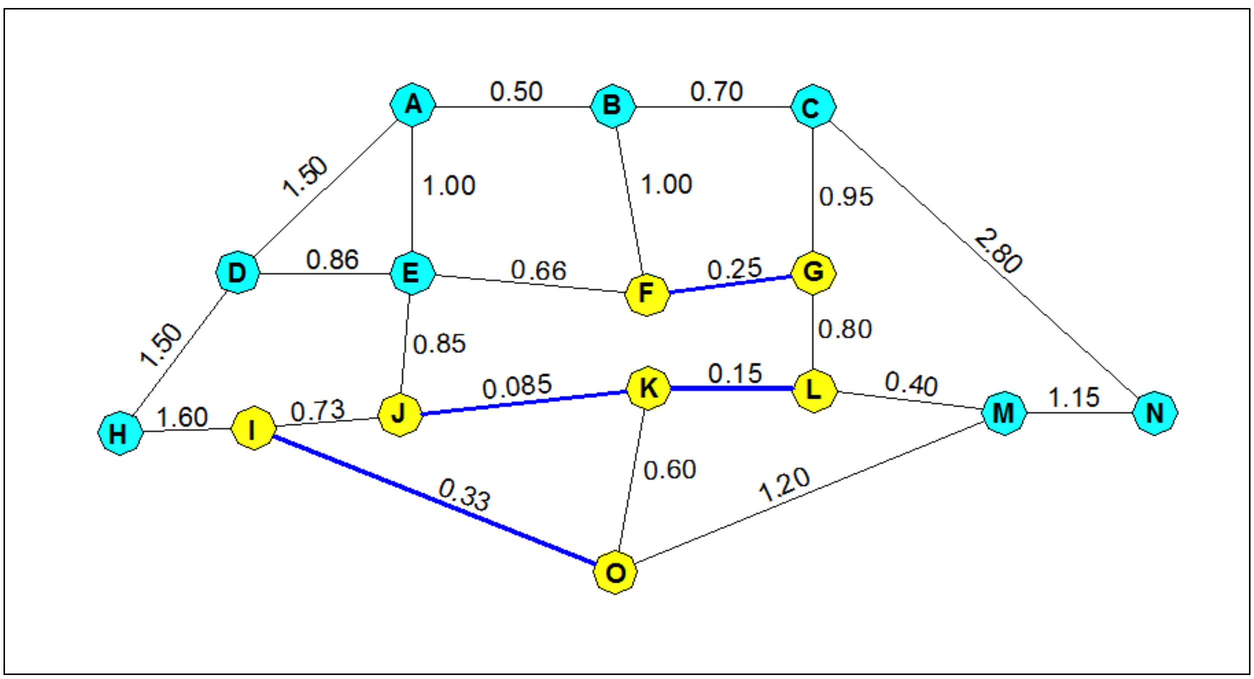



*Figura 3.5. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit L-M me gjatësi 0.40, e cila nuk formon cikël.

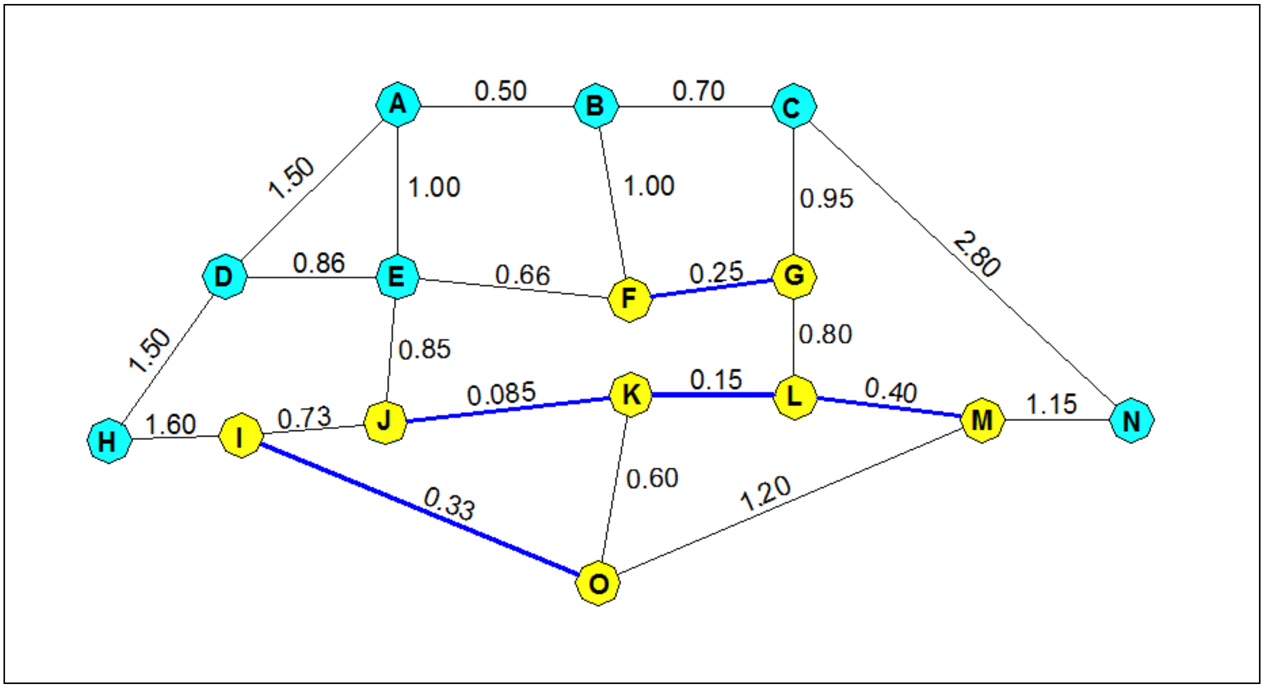



*Figura 3.6. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit A-B me gjatësi 0.50, e cila nuk formon cikël.

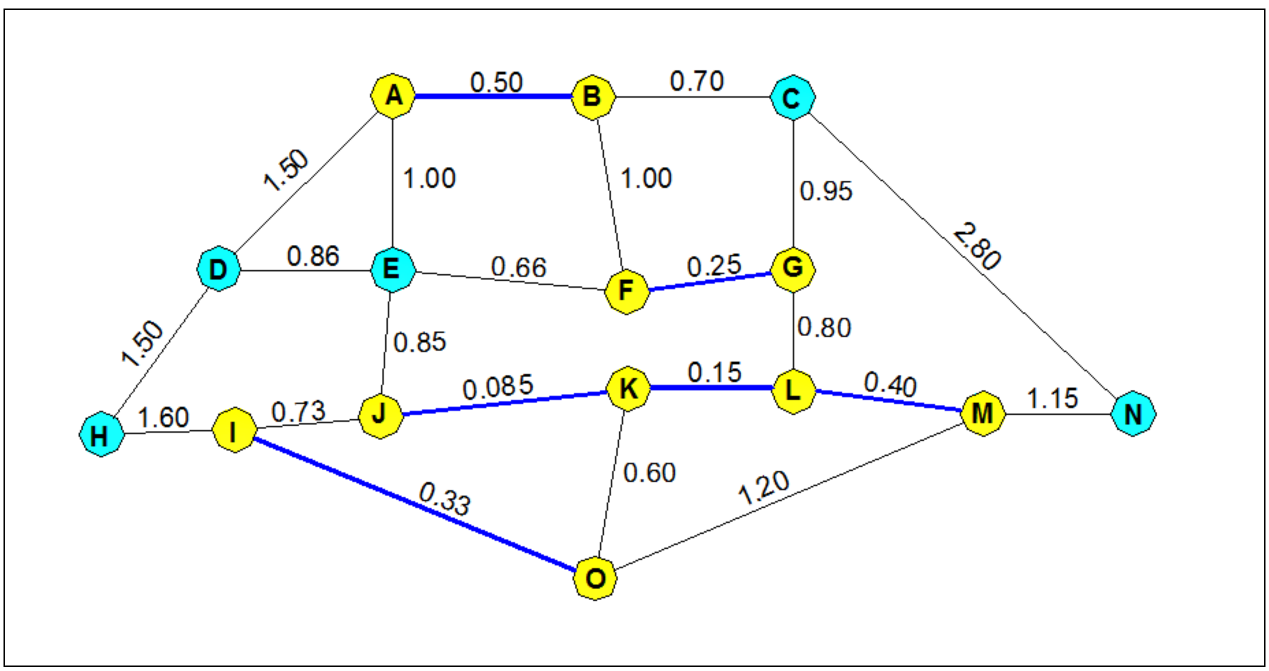



*Figura 3.7. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit K-O me gjatësi 0.60, e cila nuk formon cikël.

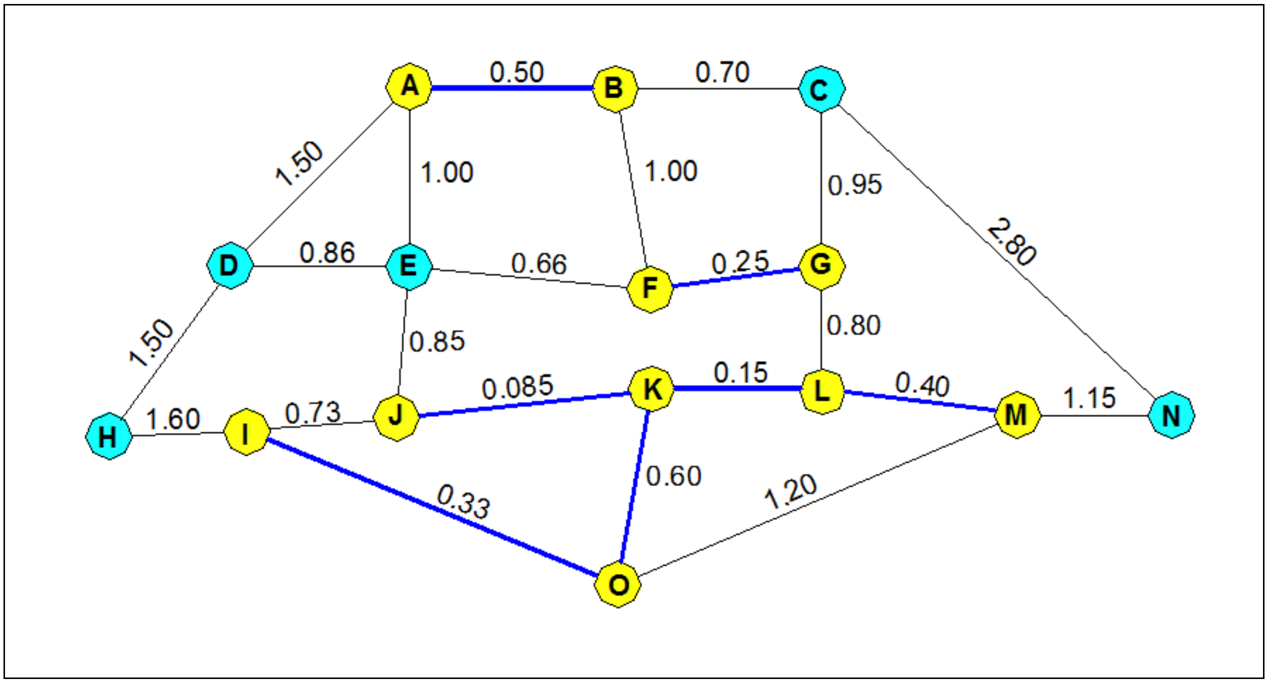



*Figura 3.8. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit E-F me gjatësi 0.66, e cila nuk formon cikël.

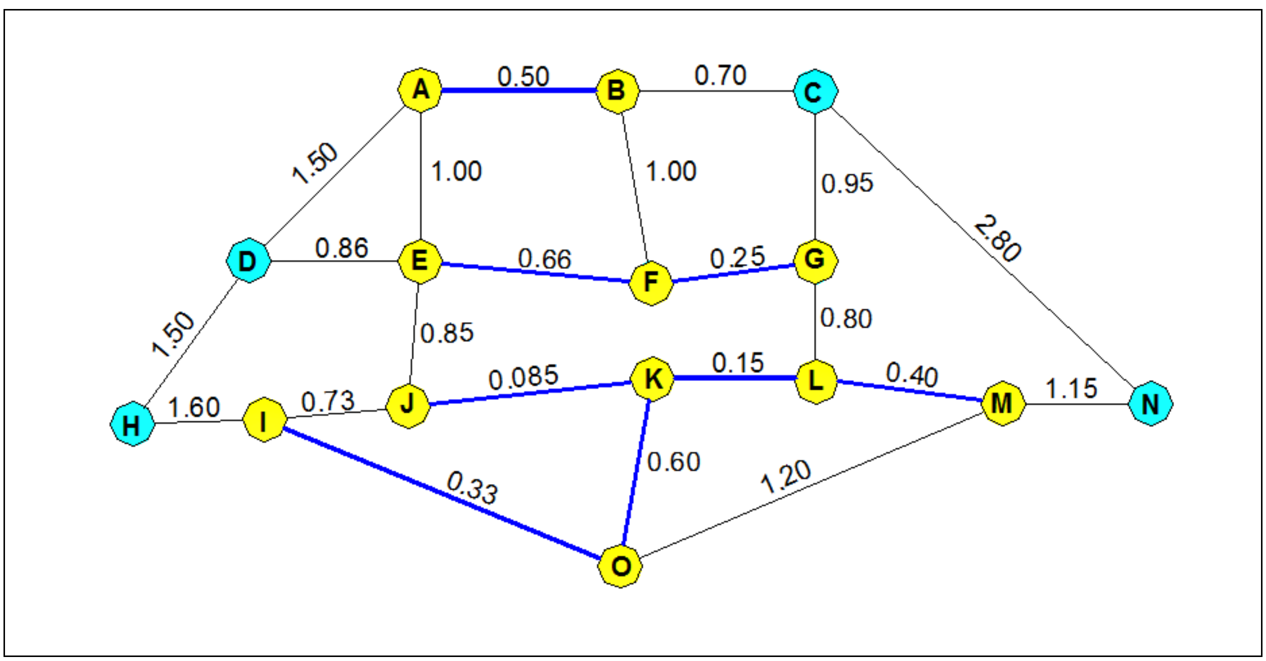



*Figura 3.9. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit B-C me gjatësi 0.70, e cila nuk formon cikël.

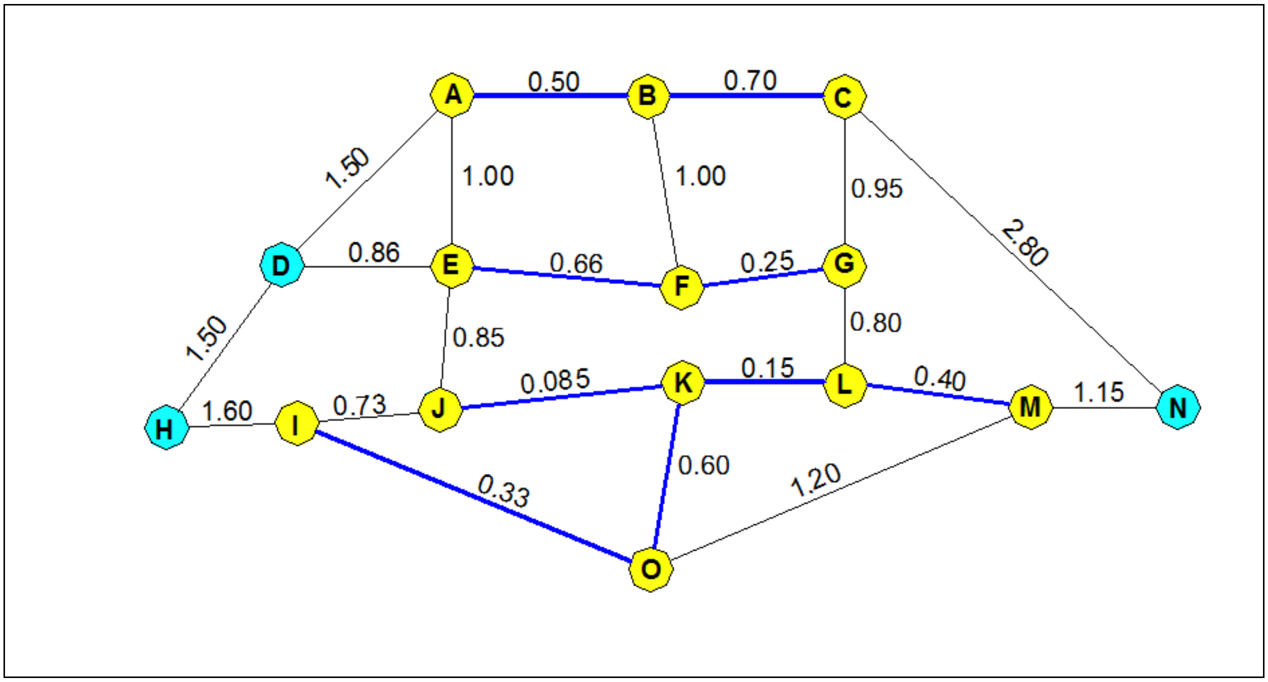



*Figura 3.10. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Rruga prej kulmit I-J me gjatësi 0.73 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Rruga tjetër me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit G-L me gjatësi 0.80, e cila nuk formon cikël.

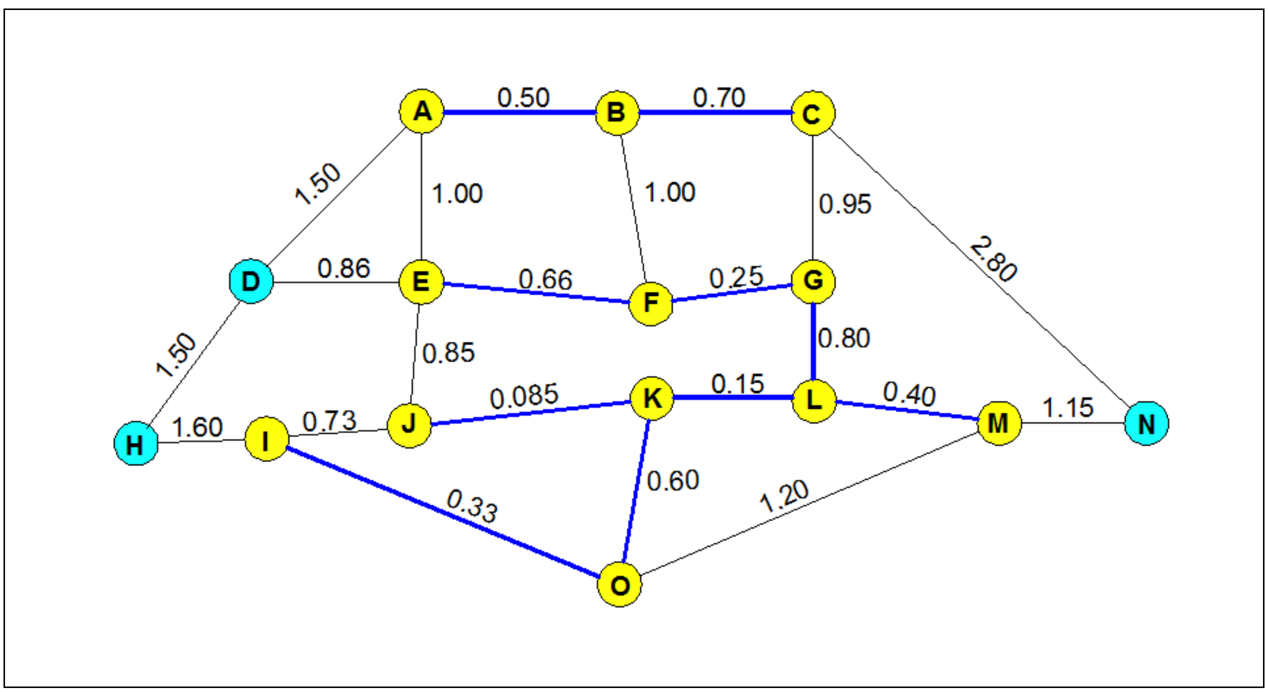



*Figura 3.11. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Rruga prej kulmit E-J me gjatësi 0.85 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit D-E me gjatësi 0.86, e cila nuk formon cikël.

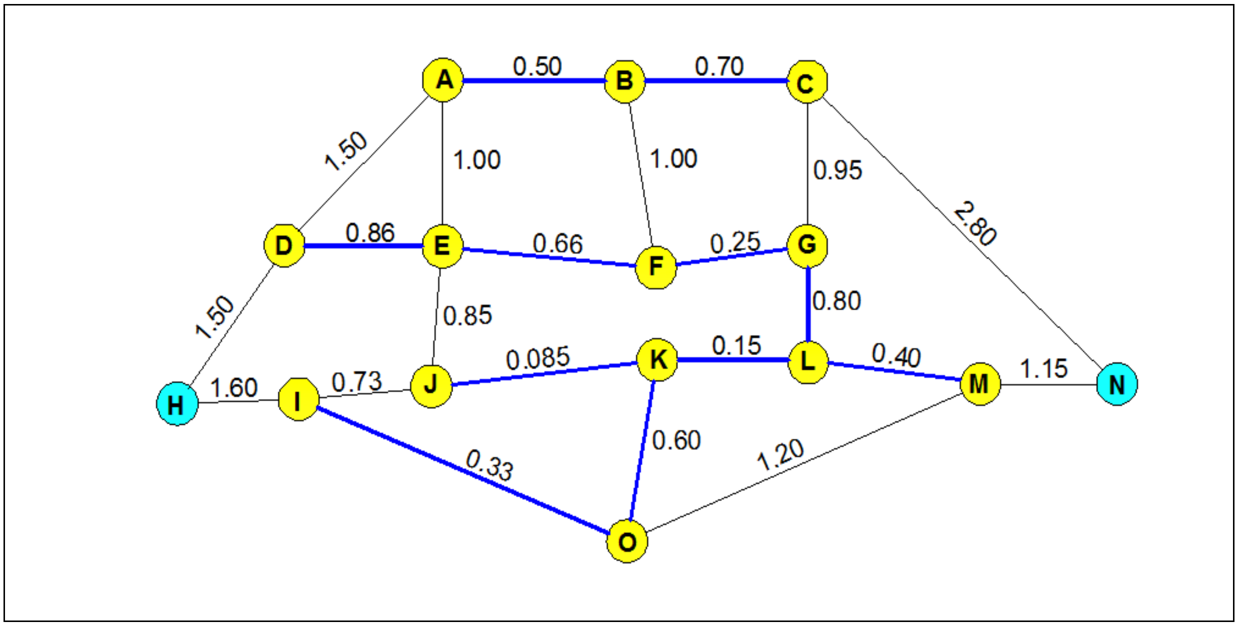



*Figura 3.12. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Pastaj rruga me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit C-G me gjatësi 0.95, e cila nuk formon cikël.

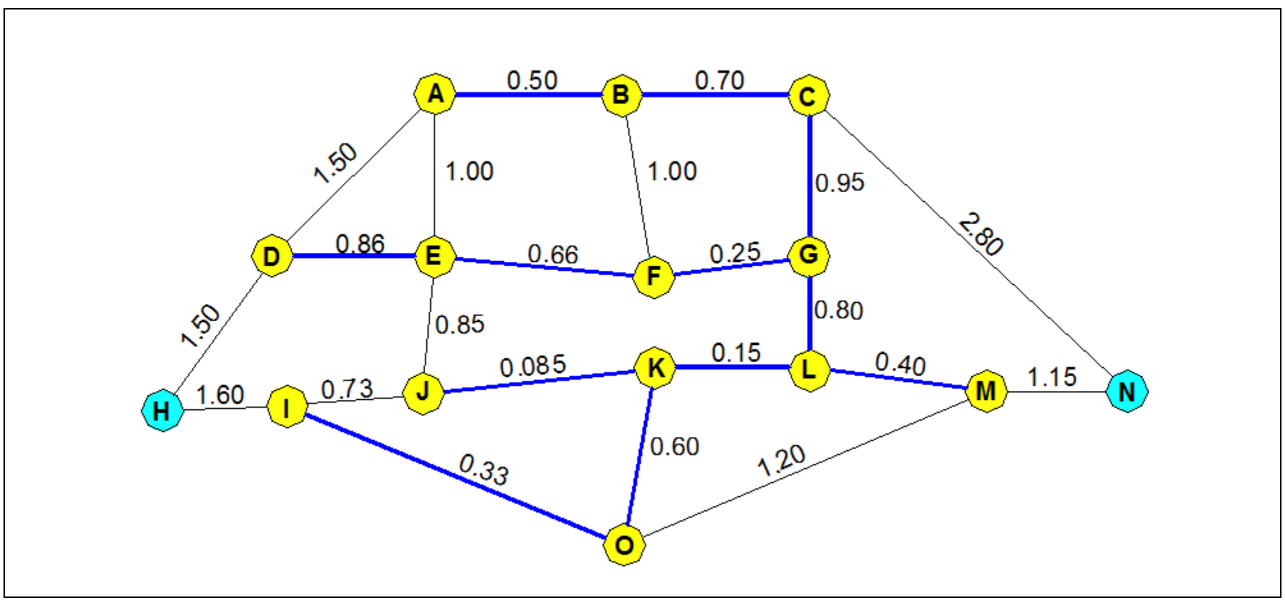



*Figura 3.13. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Rruga prej kulmit I-J me gjatësi 0.73 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Rruga prej kulmit A-E me gjatësi 1.00 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Gjithashtu edhe rruga prej kulmit B-F me gjatësi 1.00 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Rruga tjetër me distancën më të shkurtë është rruga prej kulmit M-N me gjatësi 1.15, e cila nuk formon cikël.

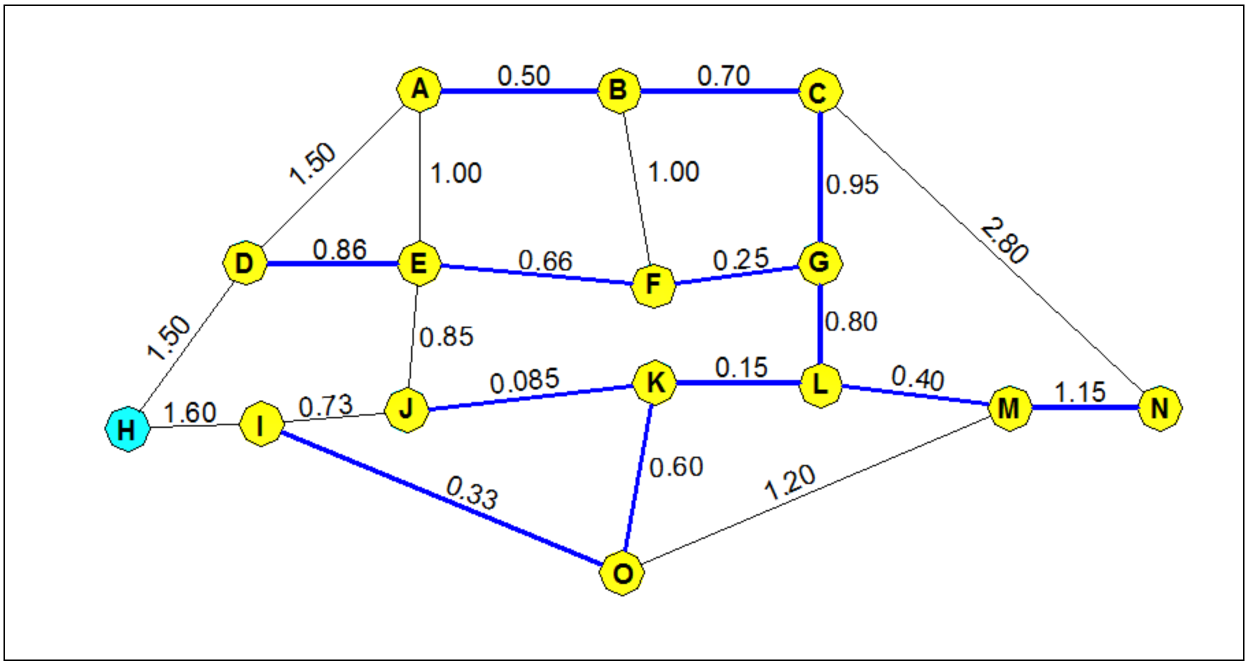



*Figura 3.14. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Rruga prej kulmit A-D me gjatësi 1.50 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Gjithashtu edhe rruga prej kulmit D-H me gjatësi 1.50 nuk caktohet, sepse po të caktohet do të formohet një cikël.

Në fund procesi përfundon me distancën ndërmjet kulmit H-I me gjatësi 1.60,e cila nuk formon cikël.

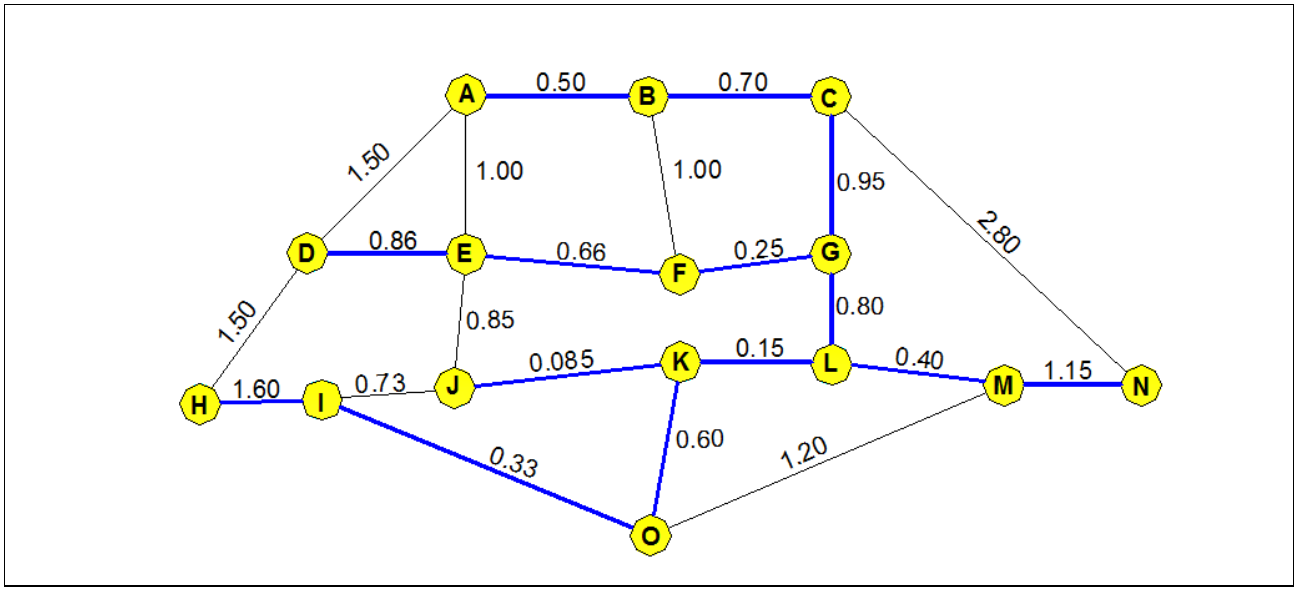



*Figura 3.15. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Dhe kështu është gjetur pema minimale në rrjetin e rrugëve lidhëse në qytetin e Gjilanit. Gjatësia e së cilës është:

(P)=(J-K)+(K-L)+(F-G)+(I-O)+(L-M)+(A-B)+(O-K)+(E-F)+(B-C)+(G-L)+(D-E)+(C-G)+(M-N)+(H-I)

(P)=0.085+0.15+0.25+0.33+0.40+0.50+0.60+0.66+0.70+0.80+0.86+0.95+1.15+1.60=9.035[km]

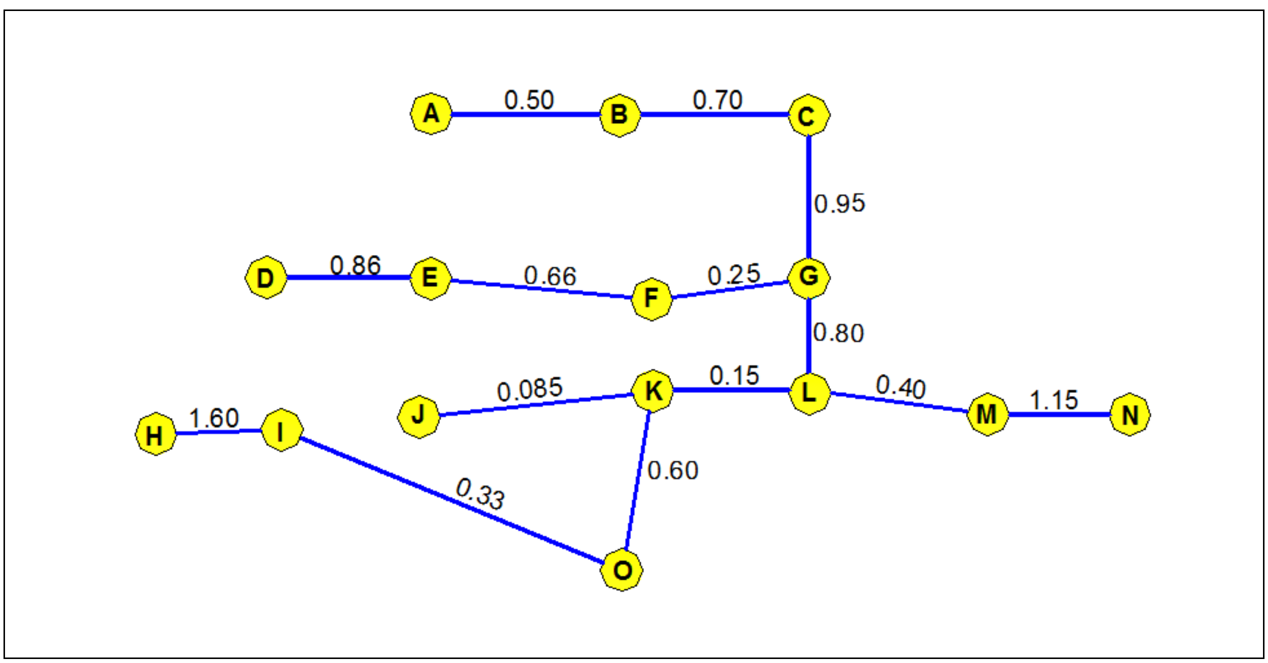



*Figura 3.16. Pema minimale(minimum spanning tree).*

Në figurën më poshtë gjendet pema minimale e rrjetit rrugor të qytetit e paraqitur në hartë.

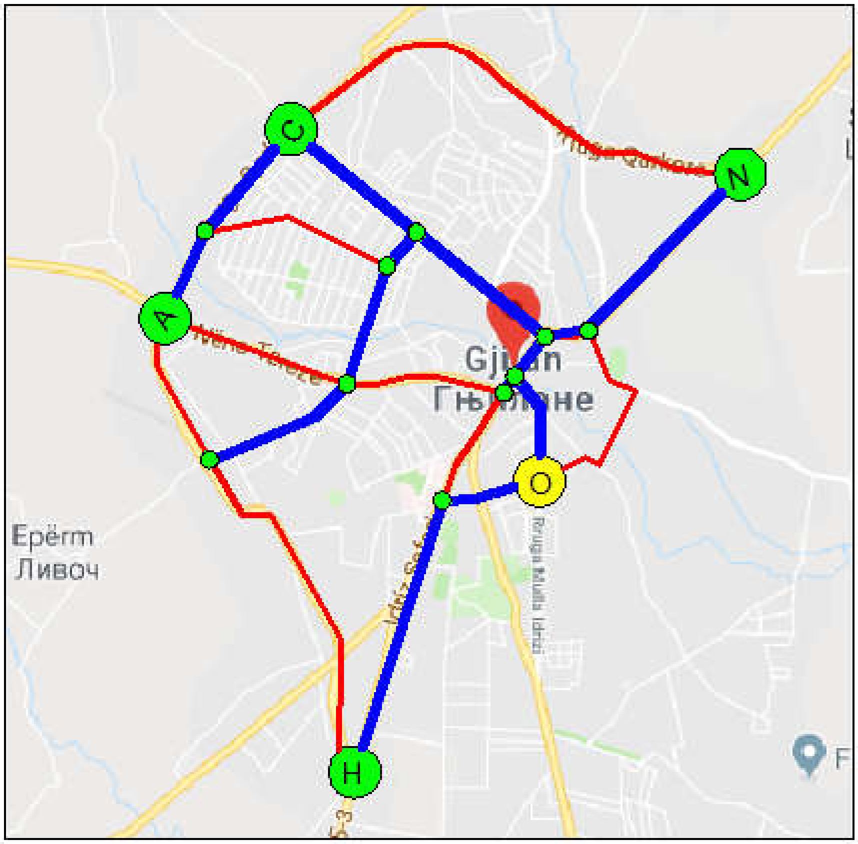



*Figura 3.17. Pema minimale e paraqitur në hartë.*

# 4.0. APLIKIMI I ALGORITMIT DIJSKTRA NË GJETJEN E ZGJIDHJES OPTIMALE PËR KATËR STACIONE TË NDRYSHME DERI NË QENDËR TË GJILANIT

Në këtë punim duke përdorur Algoritmin Dijsktra, është projektuar gjetja e rrugëve më gjatësi minimale dhe maksimale për katër stacione të ndryshme deri në qendër të Gjilanit. Gjithashtu, për këtë rast është analizuar dhe realizuar në mënyrë të detajuar gjetja e rrugëve me kosto të shpenzimeve minimale dhe maksimale.

Në figurën më poshtë është paraqitur rrjeti i rrugëve lidhëse në Gjilan i marrë për analizë.

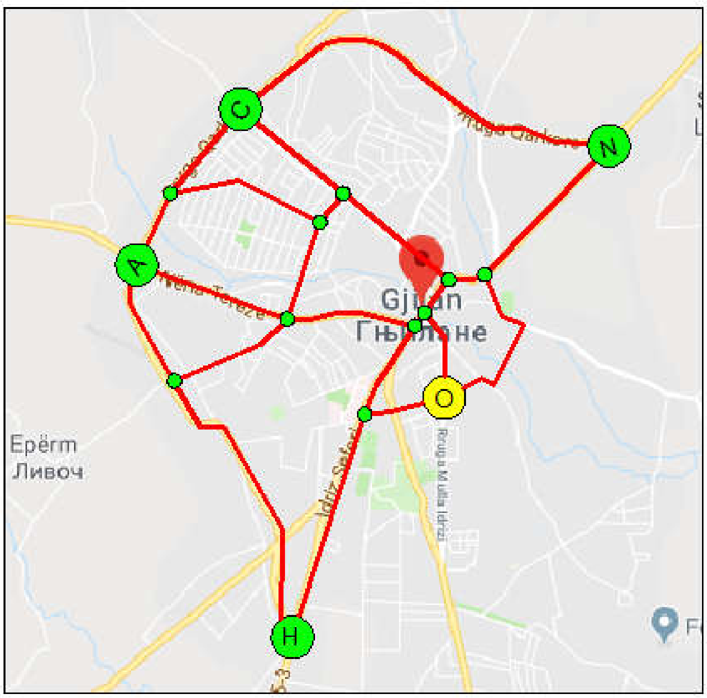



*Figura 4.0. Rrjeti rrugor i qytetit të Gjilanit.*

Analiza është bërë për katër kulmet: A, C, H, dhe N, që kanë destinacion kulmin O.

Kulmi A është rruga *"Nënë Tereza"* (rruga e Prishtinës),

Kulmi C është rruga *"Halim Orana"* (rruga që të lidhë me kolegjin FAMA),

Kulmi H është rruga *"Idriz Seferi"* (rruga e Ferizajit),

Kulmi N është rruga *"Marie Shllaku"* ( rruga e Bujanocit), dhe

Kulmi O ështe qendra e qytetit (rrethi i madh).

Rrjeti rrugor i qytetit i shëndrruar në graf.

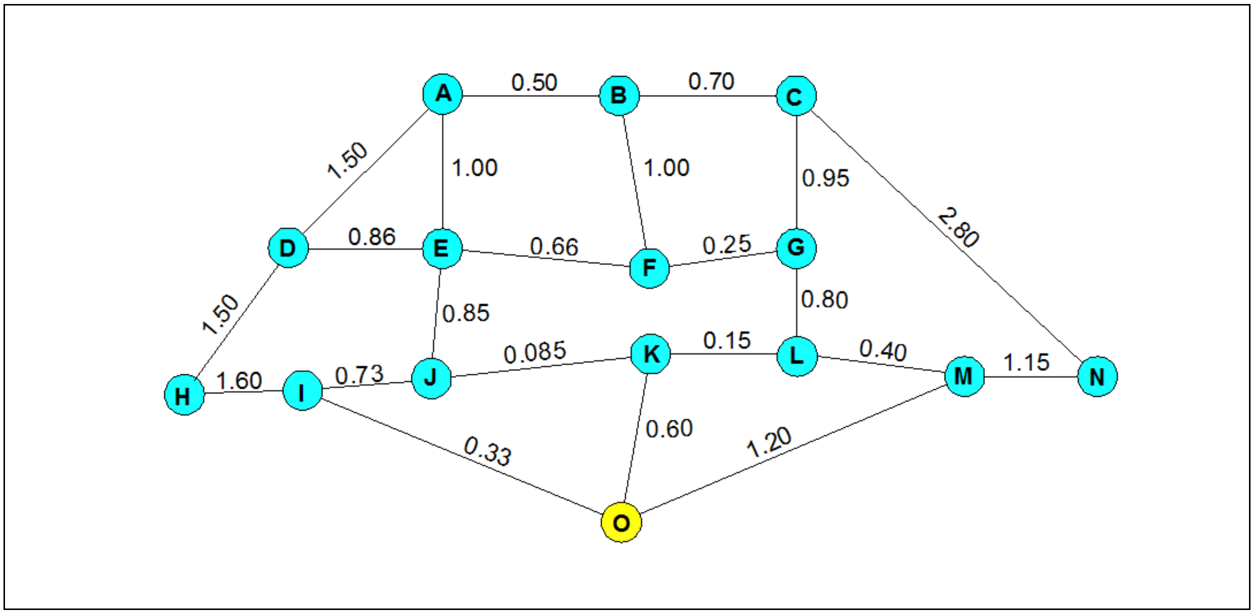



*Figura 4.1. Graf i lidhur.*

## 4.1. RRUGA MË E SHKURTË PREJ KULMIT A NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MINIMALE

Rrugët nga A deri në O në grafin e dhënë janë të shumta pa përdorimin e këtij algoritmi, por duhet shumë mund të vihet deri te ajo më e shkurtra.

Algoritmi Dijsktra na mundëson gjetjen e distancave më të shkurtra nga një kulm në të gjitha kulmet tjera.

Së pari fillojmë nga kulmi A duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi A në kulmet (B dhe D dhe E).

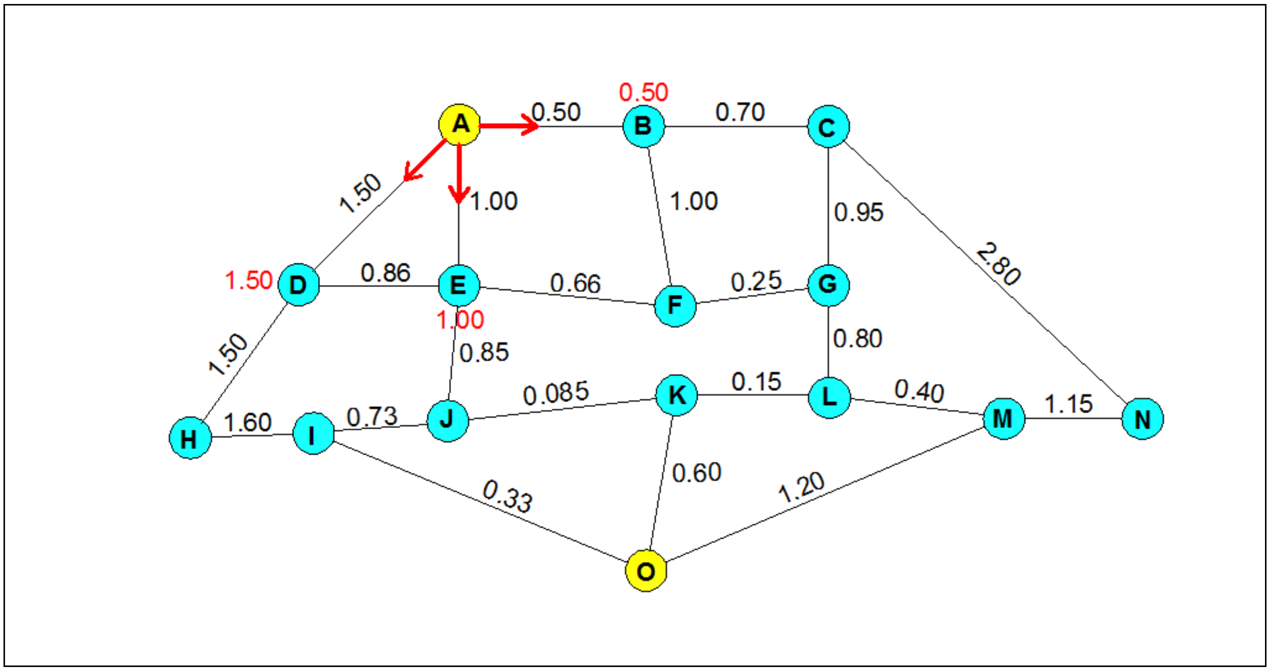



*Figura 4.1.0. Rruga më e shkurtë A-O.*

Distanca më e vogël prej kulmit A në kulmet fqinjë (B, D dhe E) është 0.50 $[km]$.

Pastaj kulmin B me distancën 0.50 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 0.50.

Secilit kulm fqinjë (kulmit C dhe F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

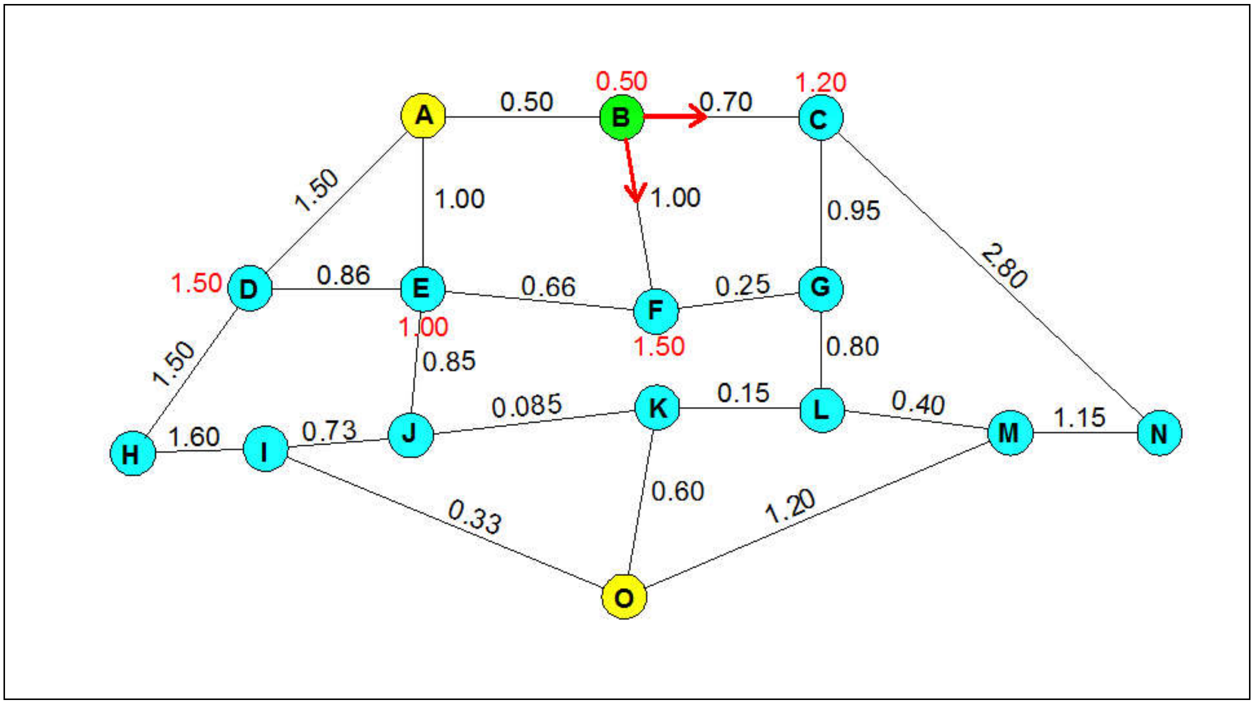



*Figura 4.1.1. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të vogël e cila është 1.00.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 1.00.

Secilit kulm fqinjë (kulmit D, F dhe J) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi E në kulmin D është 1.86, shohim se 1.86>150, prandaj mbetet distanca e mëparshme 1.50 dhe ajo 1.86 nuk merret parasysh.

Gjithashtu vërejmë se distanca nga kulmi E në kulmin F ështe 1.66, shohim se 1.66>1.50, prandaj mbetet distanca e mëparshme 1.50 dhe ajo 1.66 nuk merret parasysh.

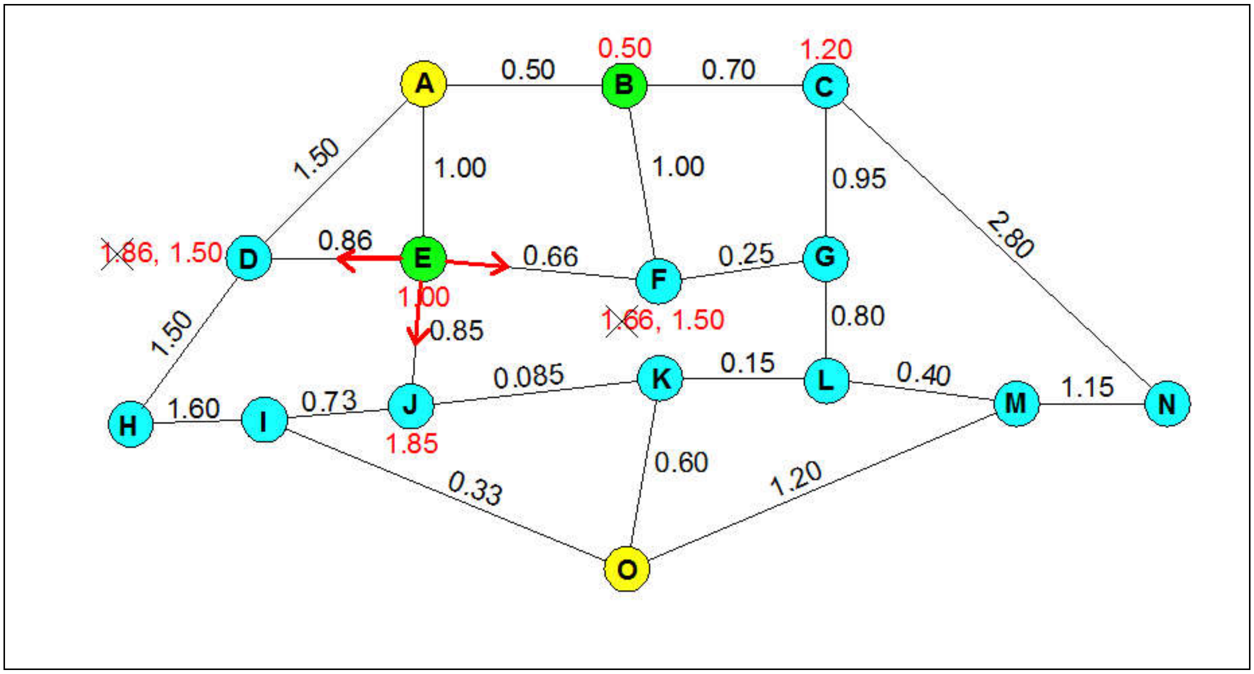



*Figura 4.1.2. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin C me distancën më të vogël e cila është 1.20.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit C me distancë 1.20.

Secilit kulm fqinjë (kulmit G dhe N) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

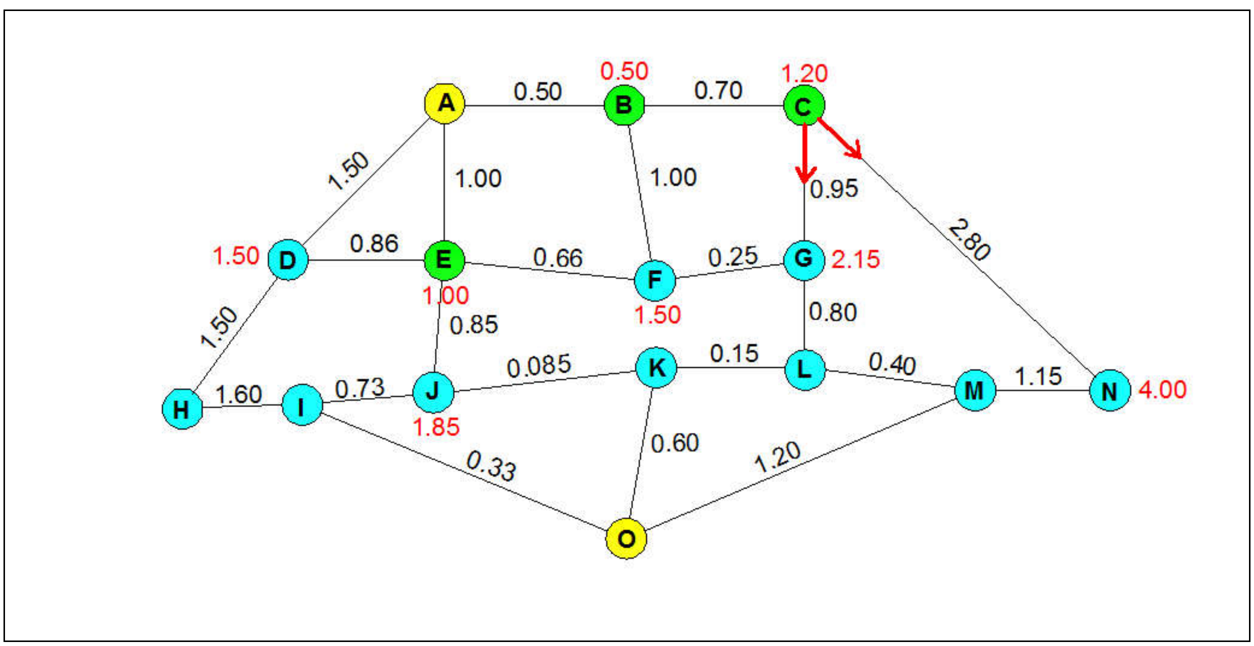



*Figura 4.1.3. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Me që i kem dy kulme (D dhe F) me distancë të njëjtë 1.50, zgjedhim së pari kulmin D.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin D me distancën më të vogël e cila është 1.50.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 1.50.

Kulmit fqinjë (kulmit H) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

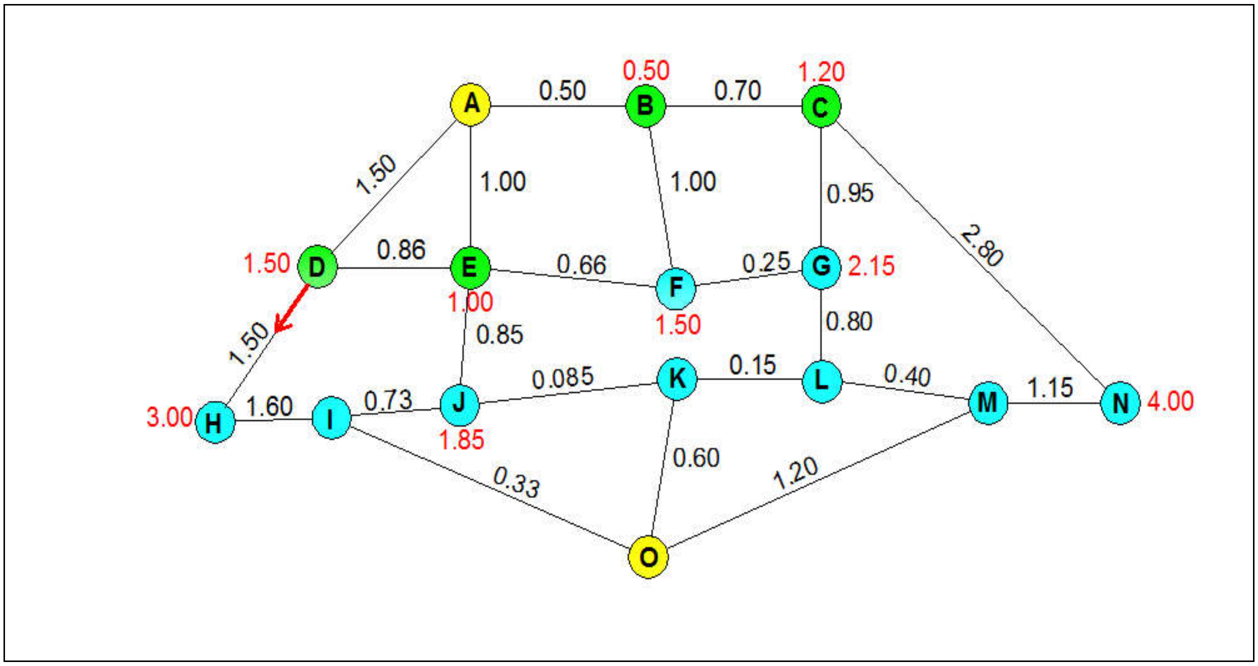



*Figura 4.1.4. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të vogël e cila është 1.50.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 1.50.

Kulmit fqinjë (kulmit G) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi F në kulmin G është më e shkurtë 1.75<2.15, prandaj eliminojmë distancën 2.15.

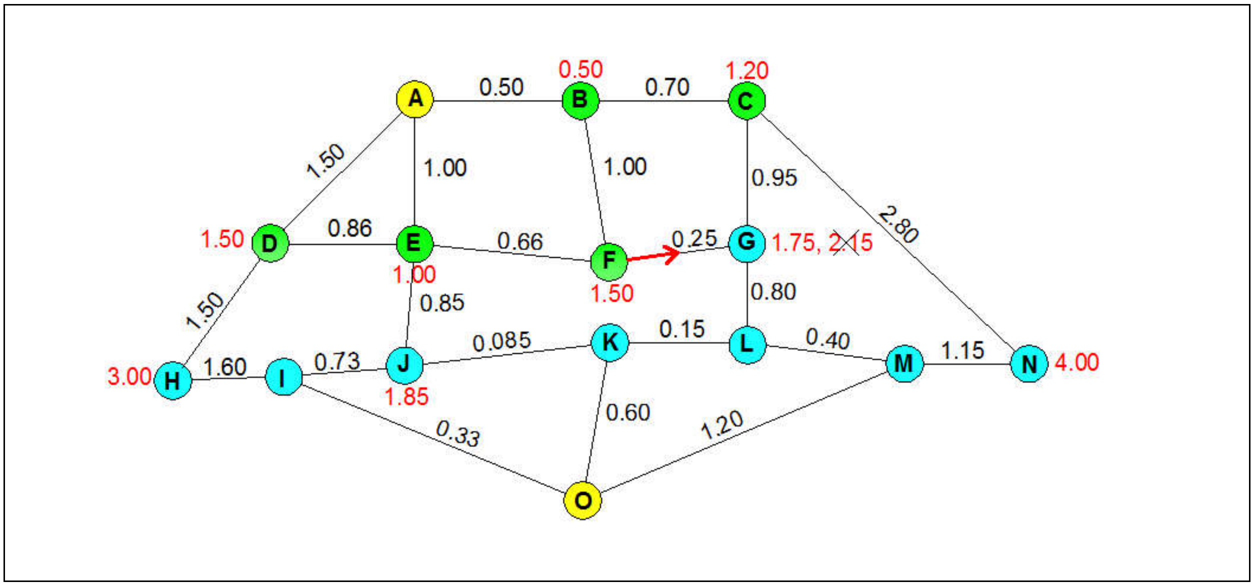



*Figura 4.1.5. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të vogël e cila është 1.75.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 1.75.

Kulmit fqinjë (kulmit L) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

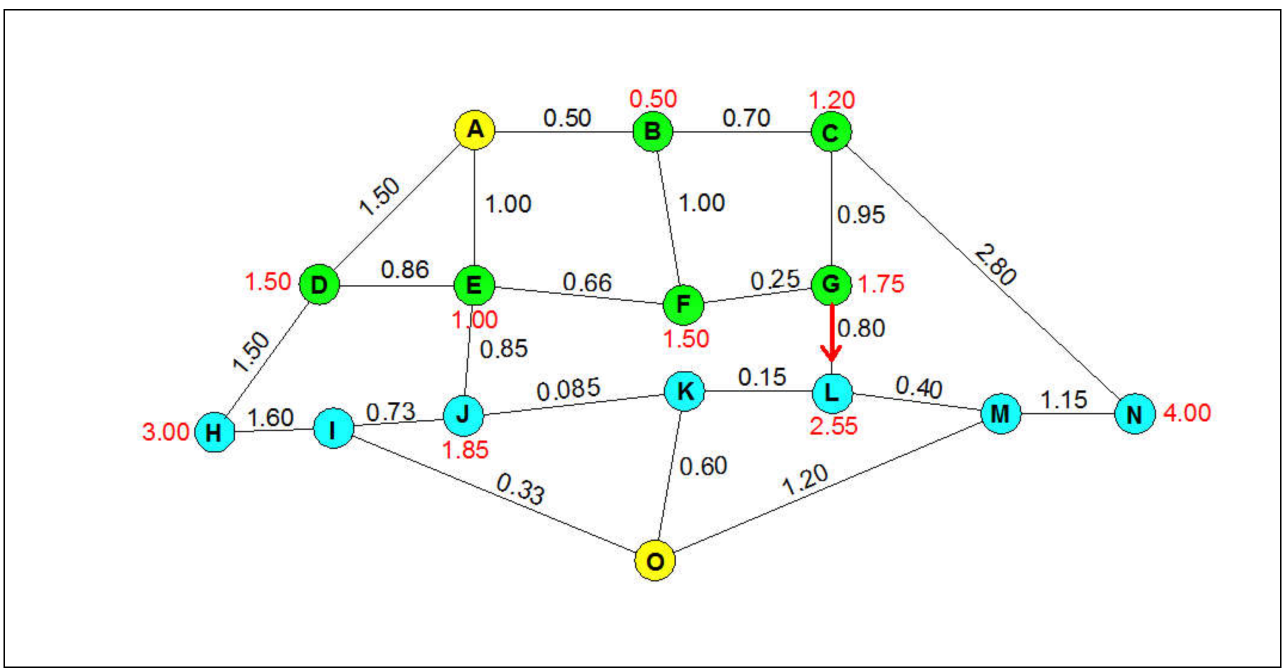



*Figura 4.1.6. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të vogël e cila është 1.85.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 1.85.

Secilit kulm fqinjë (kulmit I dhe K) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

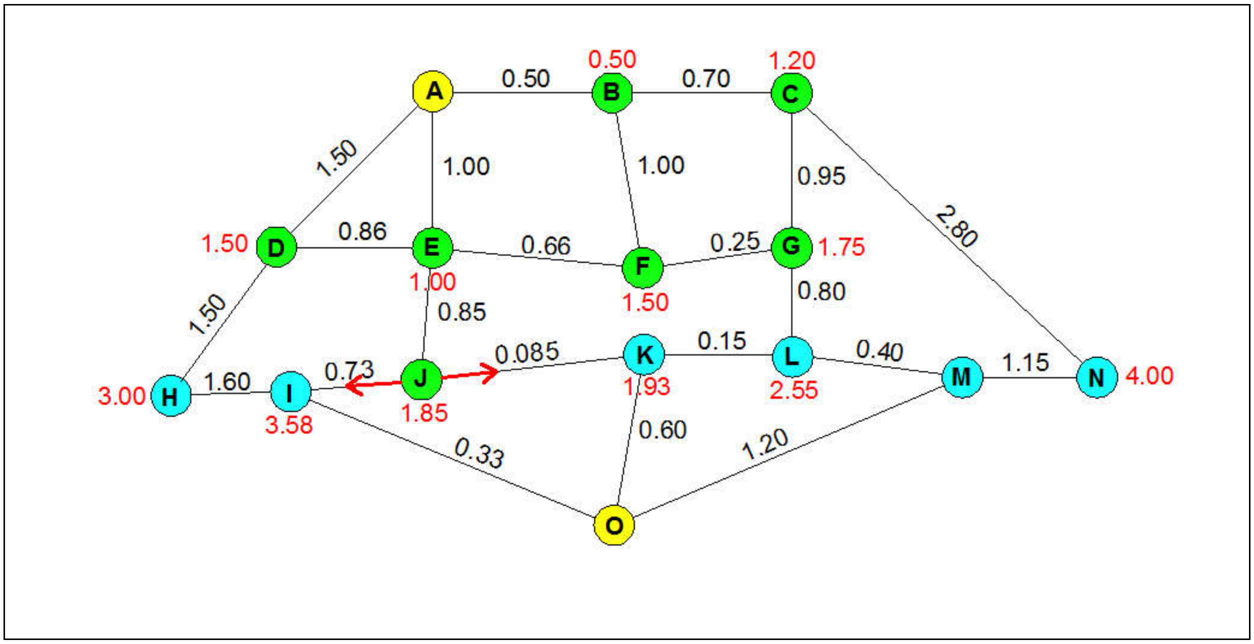



*Figura 4.1.7. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të vogël e cila është 1.93.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 1.93.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit L dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

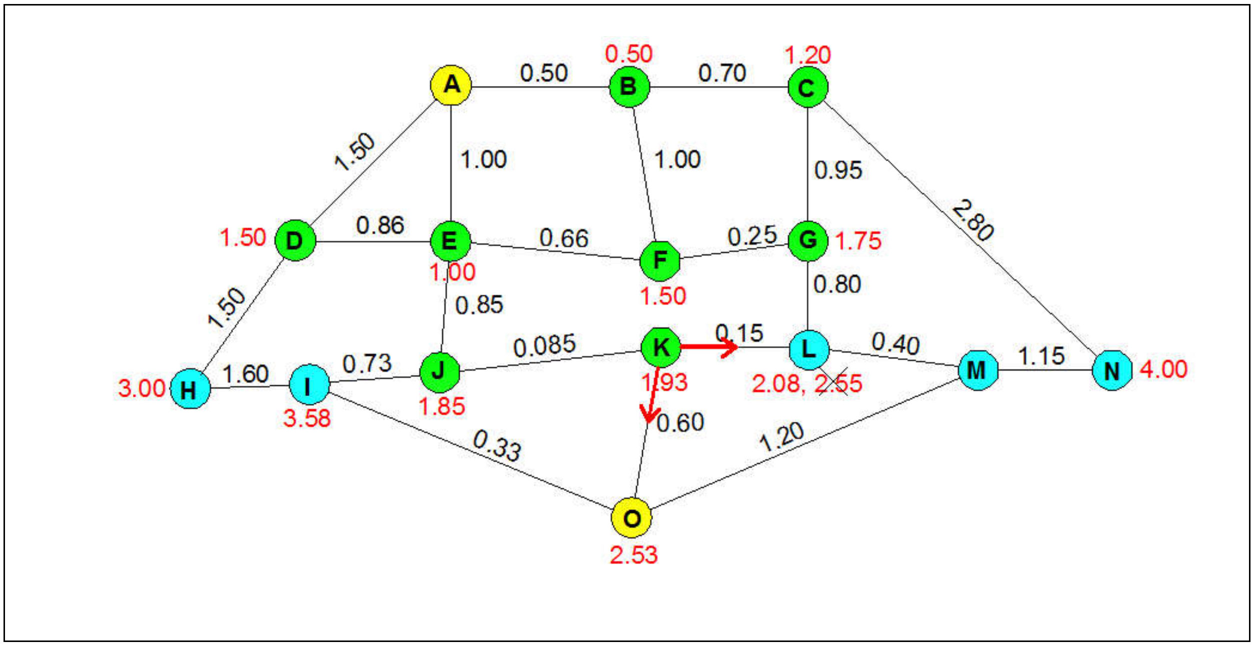



*Figura 4.1.8. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të vogël e cila është 2.08.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 2.08.

Kulmit fqinjë (kulmit M) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

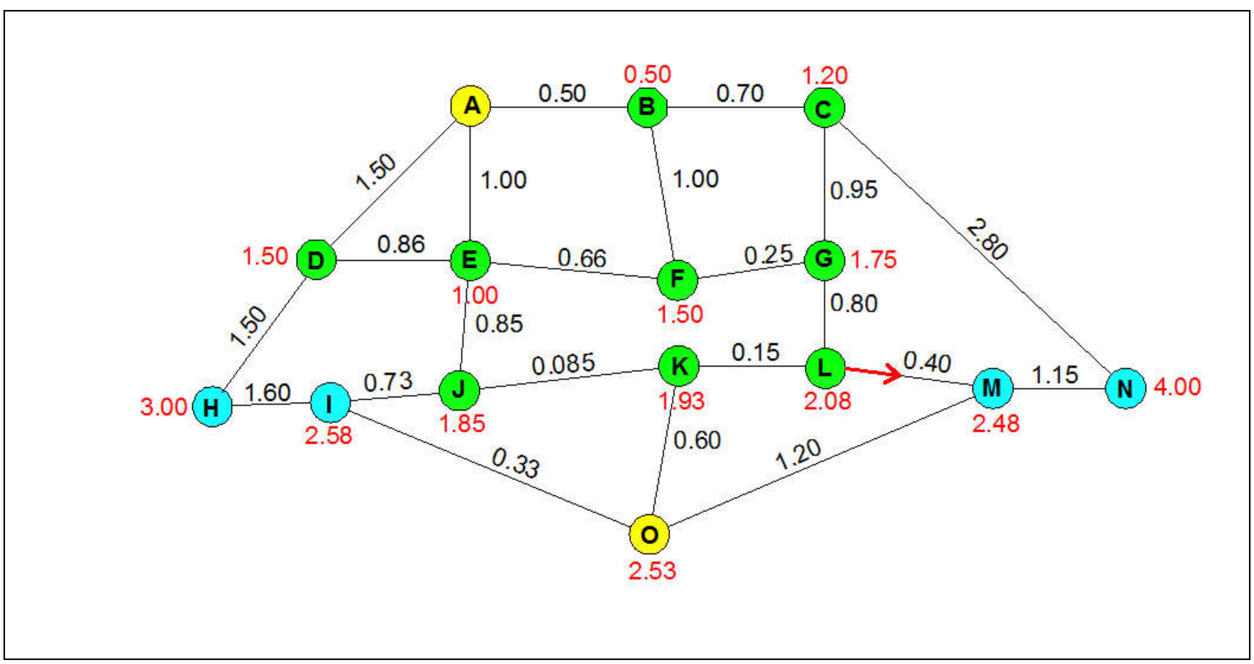



*Figura 4.1.9. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të vogël e cila është 2.48.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 2.48.

Secilit kulm fqinjë (kulmit N dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi M në kulmin N është më e shkurtë 3.63<4.00, prandaj eliminojmë distancën 4.00.

Gjithashtu vërejmë se distanca nga kulmi M në kulmin O është 3.68, shohim se 3.68>2.53, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.53 dhe ajo 3.68 nuk merret parasysh.

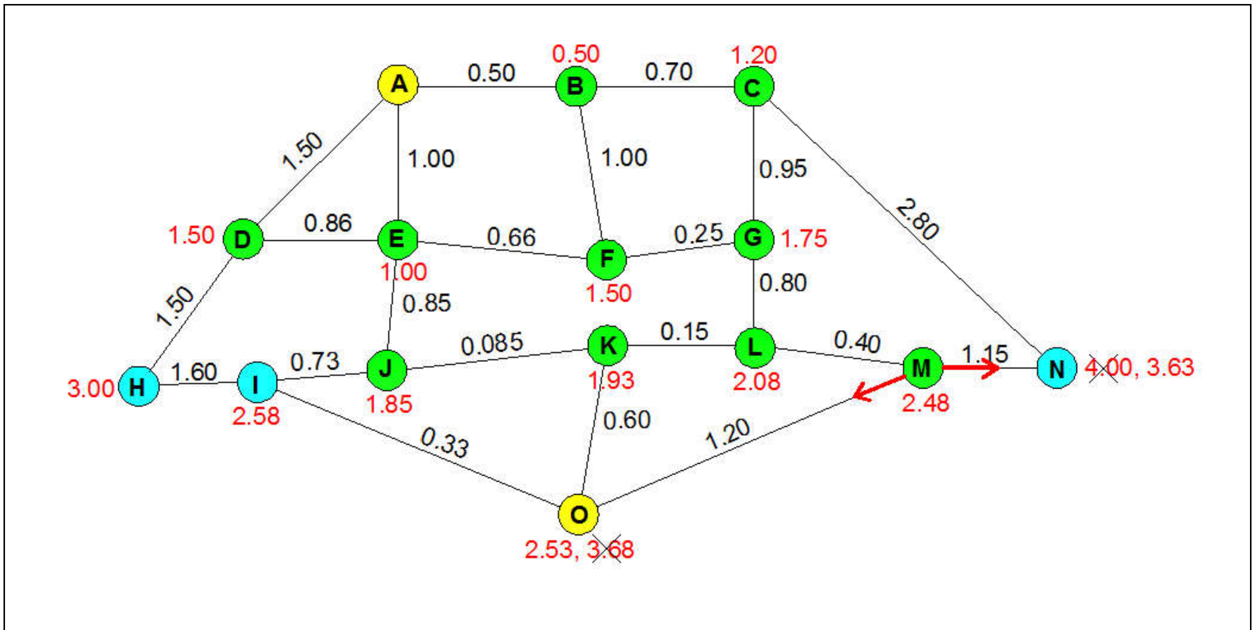



*Figura 4.1.10. Rruga më e shkurtë A-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të vogël e cila është 2.58.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 2.58.

Secilit kulm fqinjë (kulmit H dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi I në kulmin H është 4.18, shohim se 4.18>3.00, prandaj mbetet distanca e mëparshme 3.00 dhe ajo 4.18 nuk merret parasysh.

Gjithashtu vërejmë se distanca nga kulmi I në kulmin O është 2.91, shohim se 2.91>2.53, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.53 dhe ajo 2.91 nuk merret parasysh.

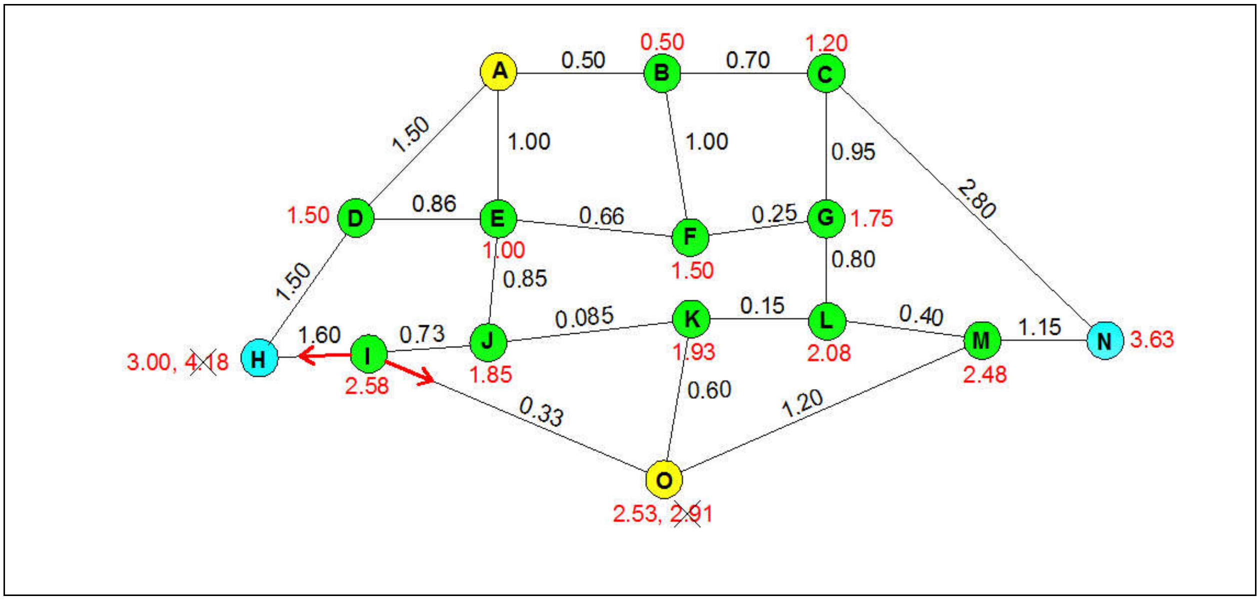



*Figura 4.1.11. Rruga më e shkurtë A-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

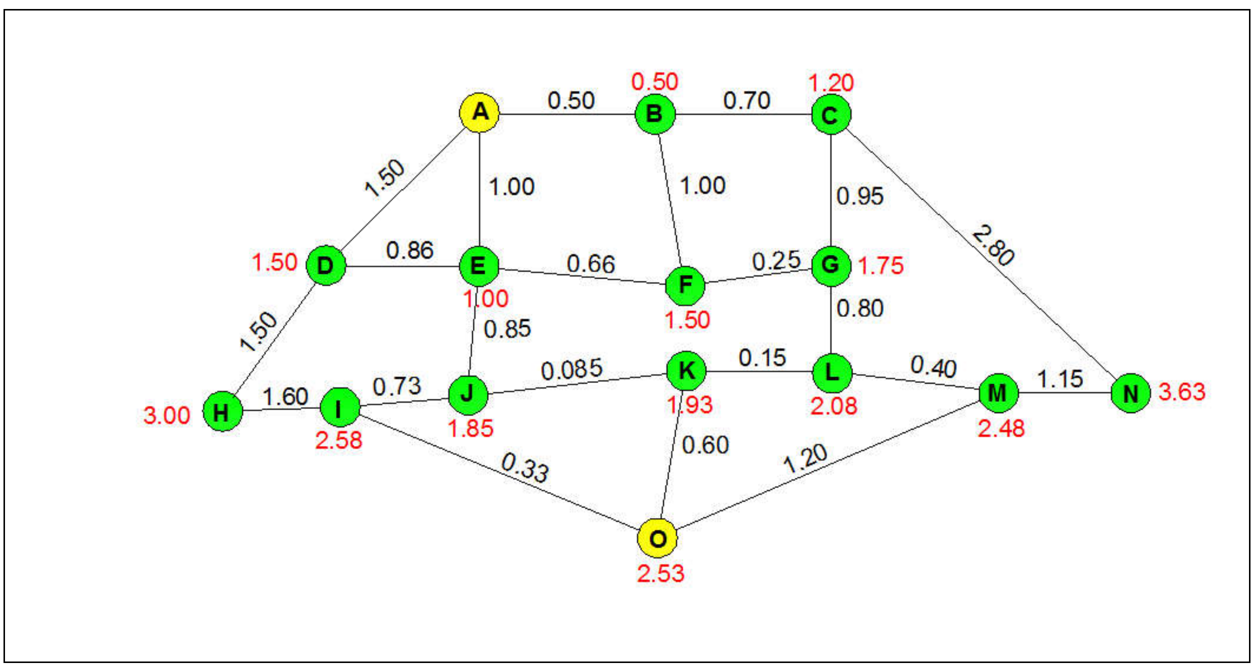



*Figura 4.1.12. Rruga më e shkurtë A-O.*

**Llogaritja e rrugës minimale A-O.**

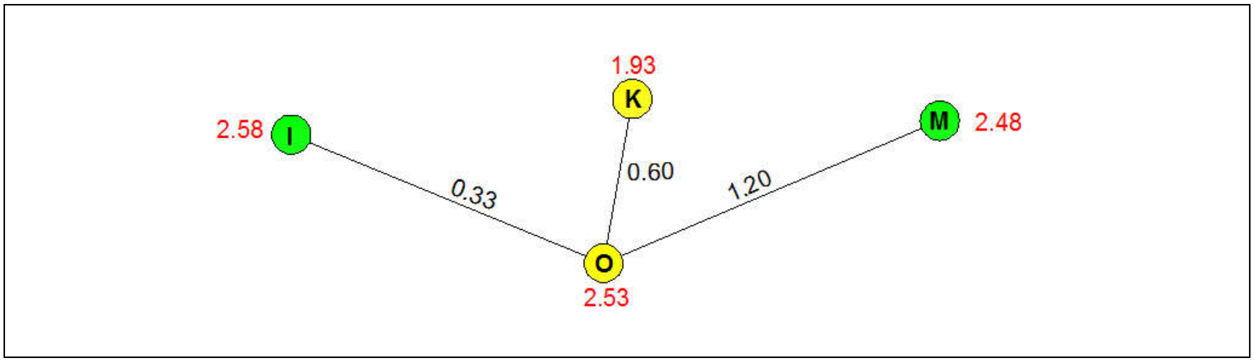
Tani mund të llogaritim rrugën minimale prej kulmit A në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$2.53-0.33 \neq 2.58$$

$$2.53-0.60=1.93 \ \surd$$

$$2.53-1.20 \neq 2.48$$



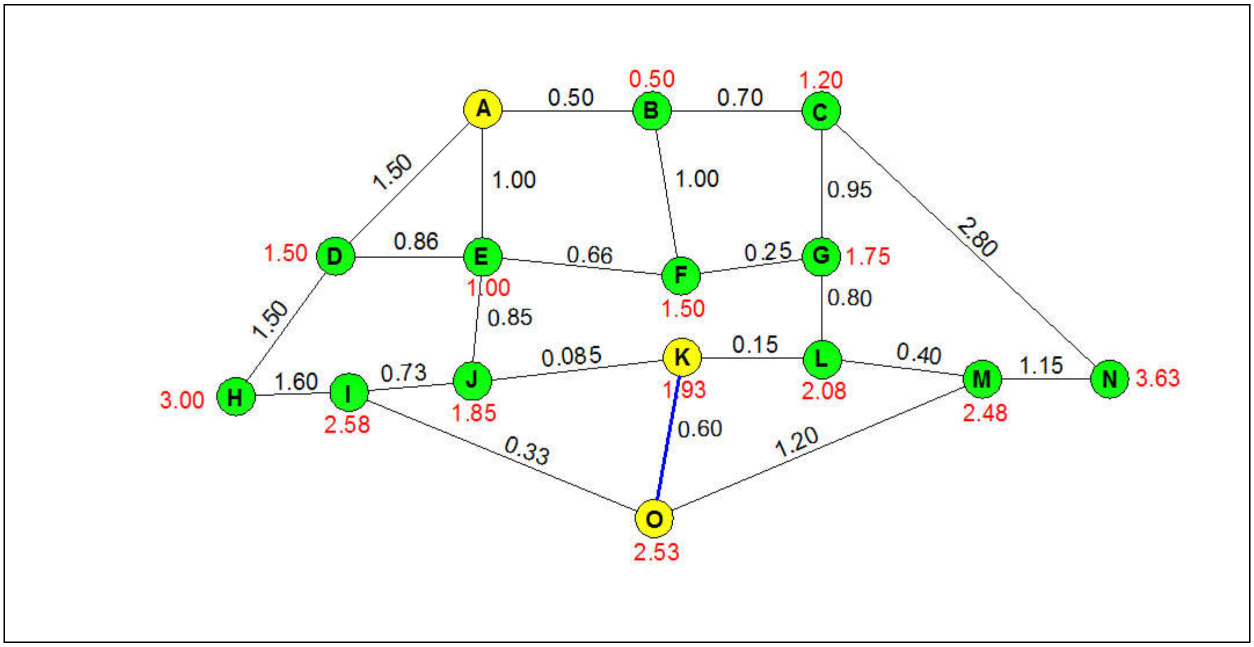
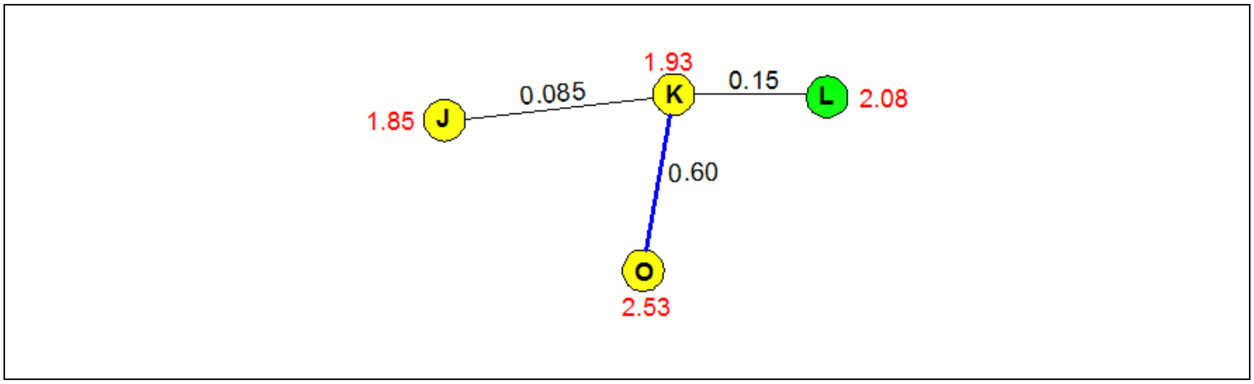




*Figura 4.1.13. Llogaritja e rrugës më të shkurtë A-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë. Tani prej kulmit K zbresim distancën e kulmeve fqinje.

1.93-0.085=1.85 √

1.93-0.15≠2.08



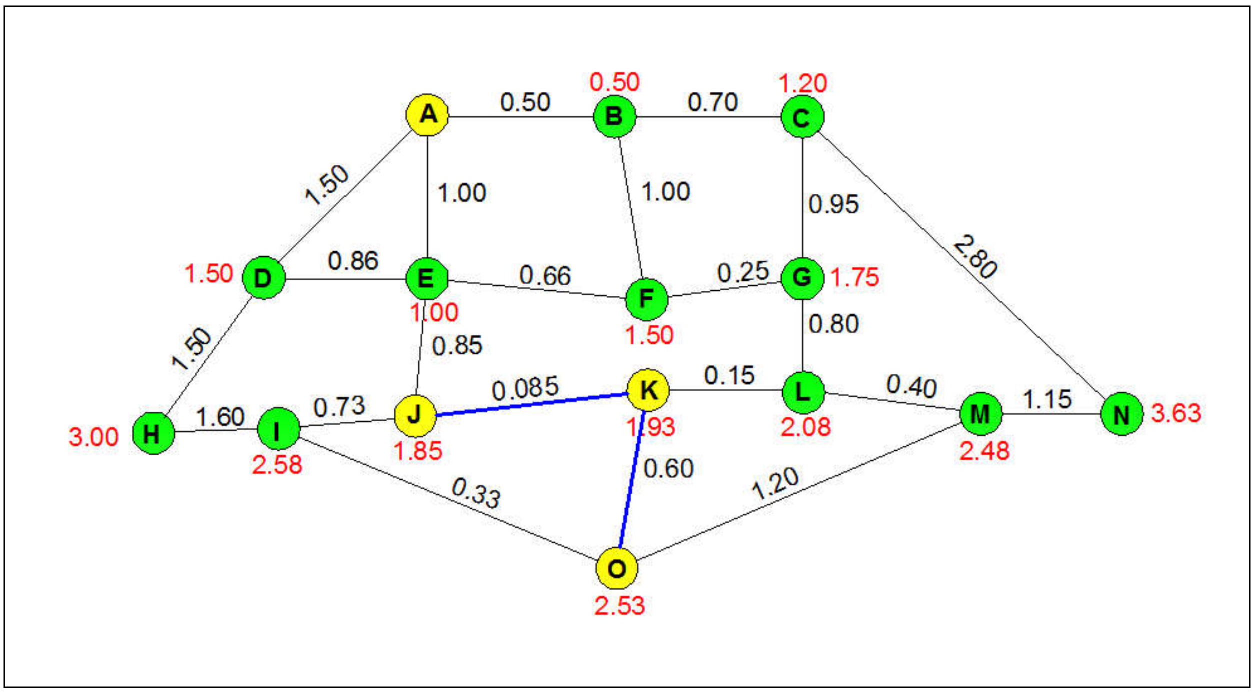
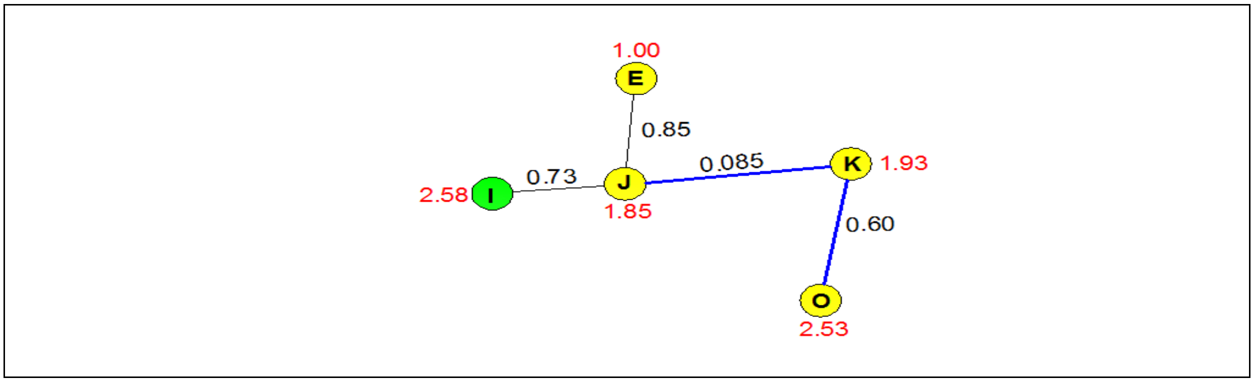




*Figura 4.1.14. Llogaritja e rrugës më të shkurtë A-O.*

Pastaj prej kulmit J zbresim distancën e kulmeve fqinje.

1.85-0.73≠2.58

1.85-0.85=1.00 √



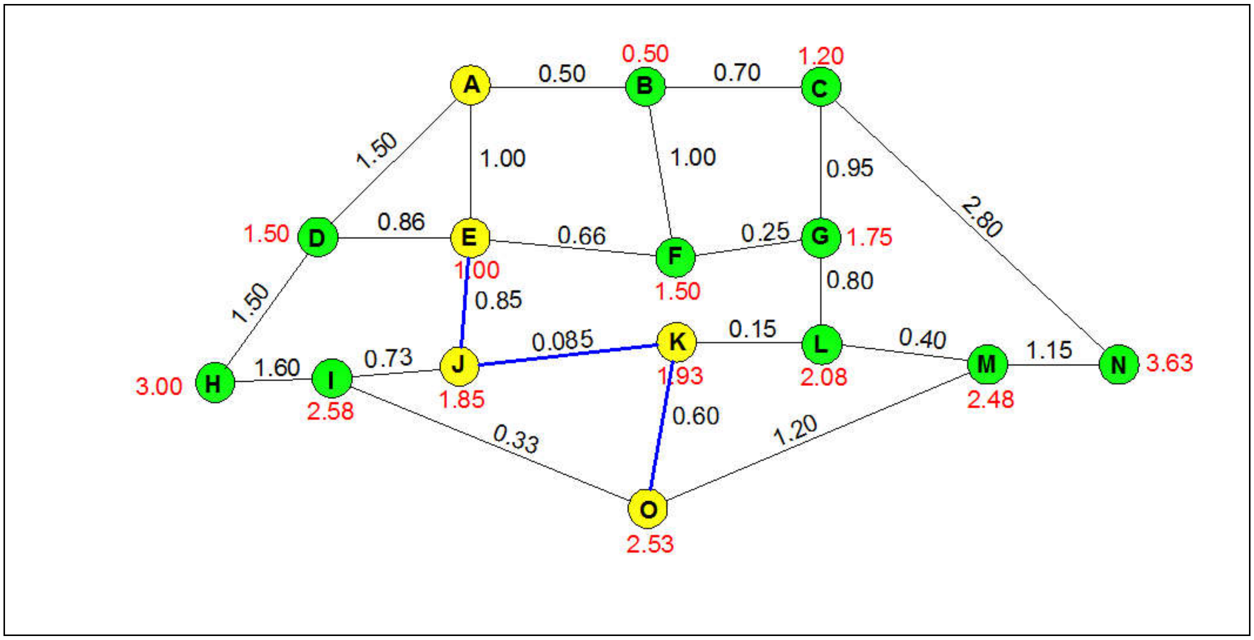




*Figura 4.1.15. Llogaritja e rrugës më të shkurtë A-O.*

Pastaj prej kulmit E zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$1.00-1.00=0.00 \surd$$

$$1.00-0.86 \neq 1.50$$

$$1.00-0.66 \neq 1.50$$

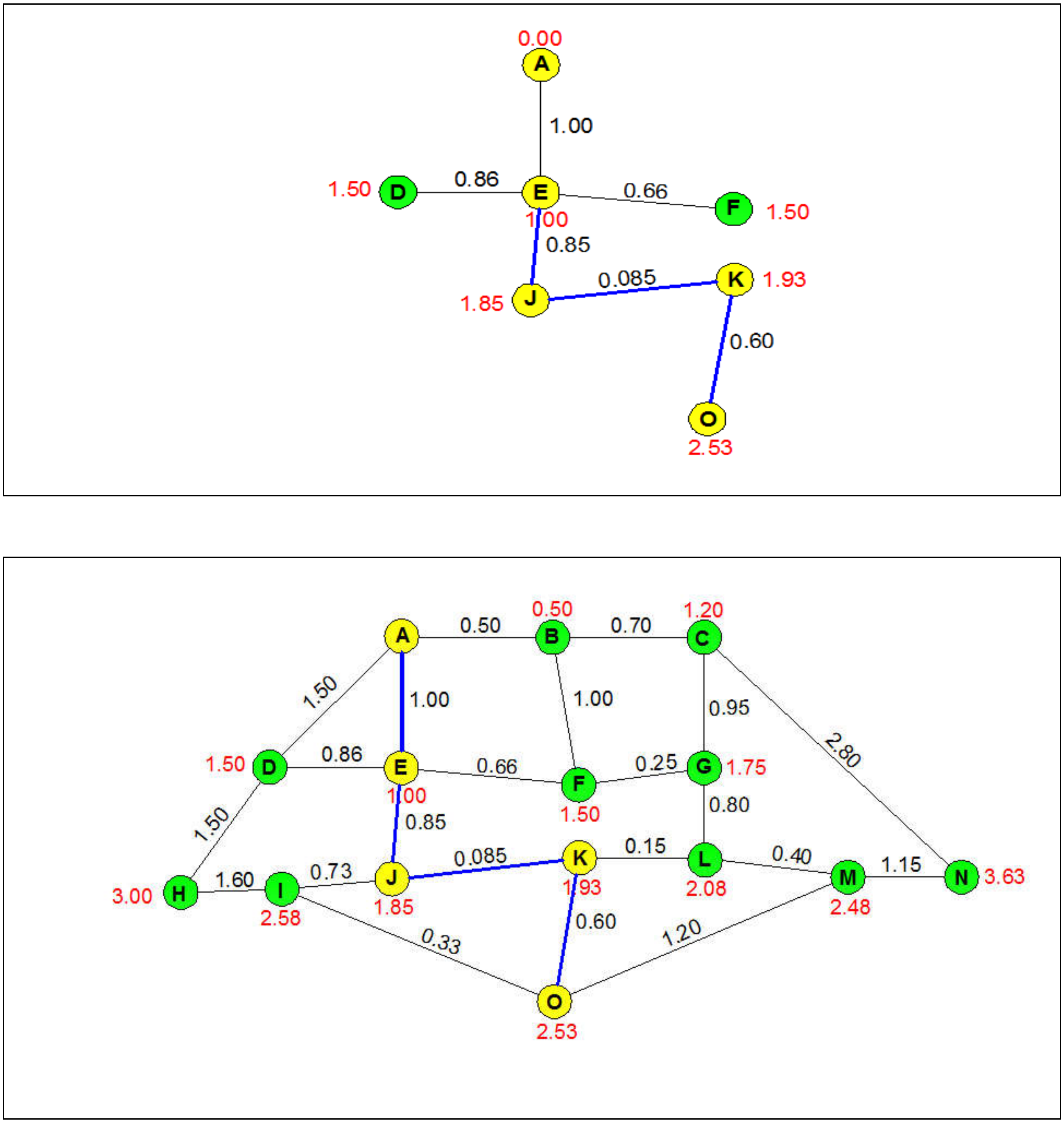



*Figura 4.1.16. Llogaritja e rrugës më të shkurtë A-O.*

Rruga me gjatësinë më të shkurtë është rruga A-E-J-K-O me gjatësi 2.53[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e shkurtë prej kulmit A-O e paraqitur në hartë.

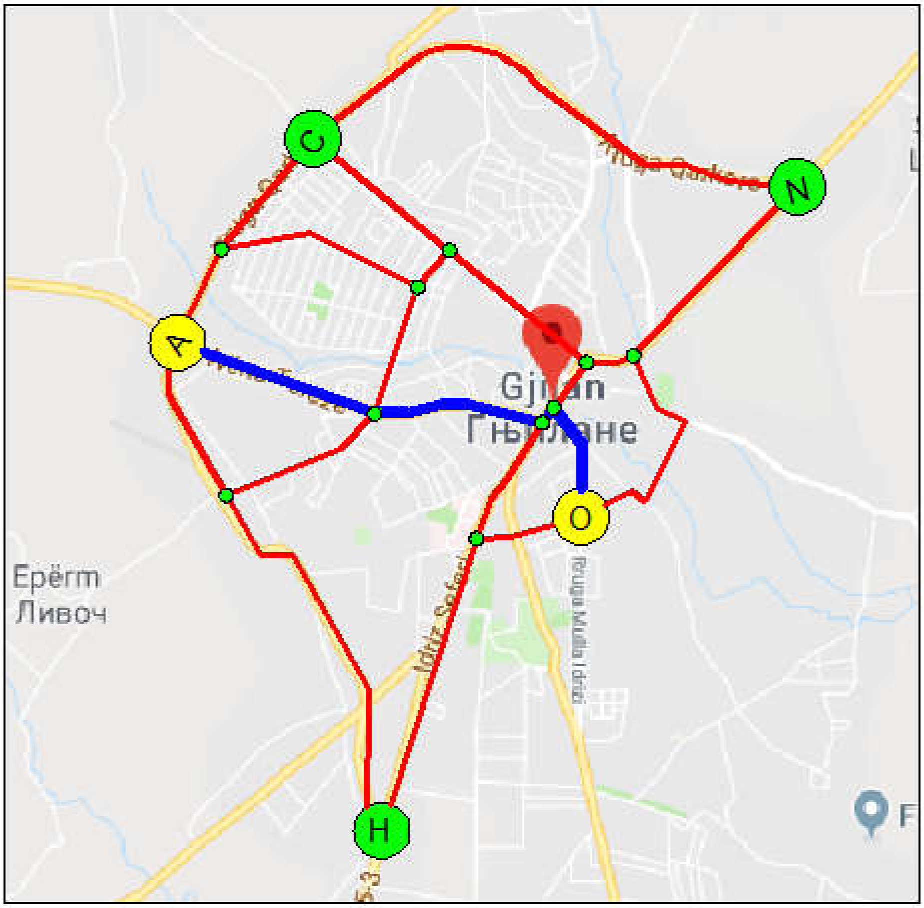



*Figura 4.1.17. Rruga më e shkurtë A-O e paraqitur në hartë.*

## 4.2. RRUGA MË E SHKURTË PREJ KULMIT C NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MINIMALE

Së pari fillojmë nga kulmi C duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi C në kulmet (B dhe G dhe N).

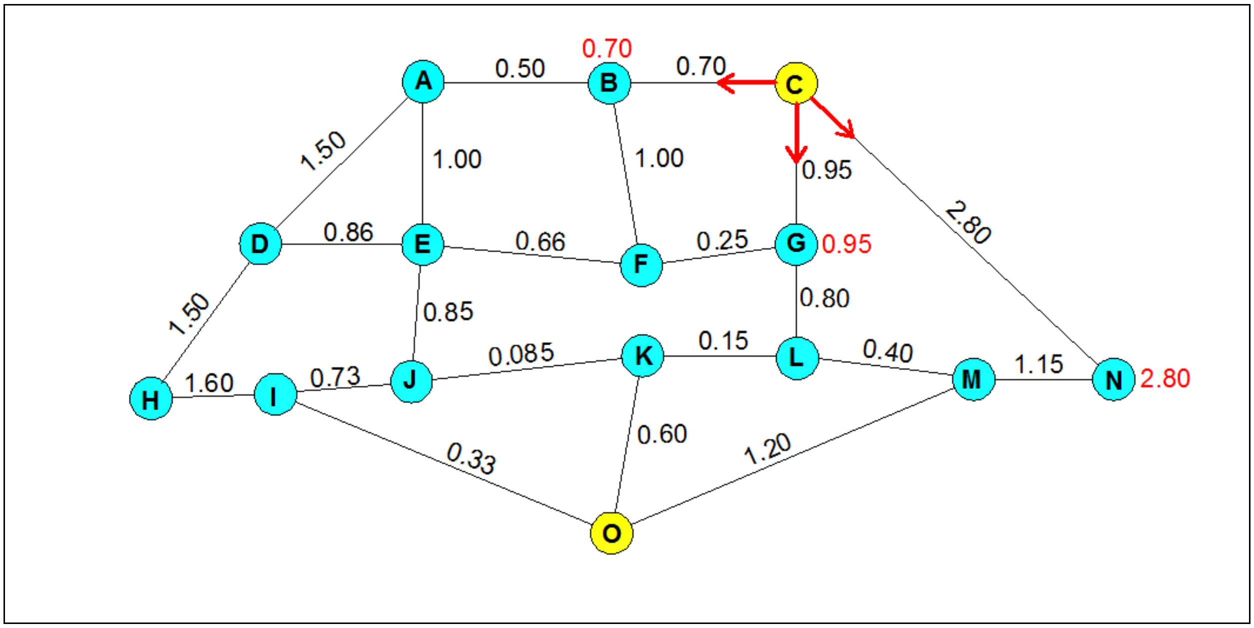



*Figura 4.2.0. Rruga më e shkurtë C-O.*

Distanca më e vogël prej kulmit C në kulmet fqinjë (B, G dhe N) është 0.70.

Pastaj kulmin B me distancën 0.70 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 0.70.

Secilit kulm fqinjë (kulmit A dhe F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

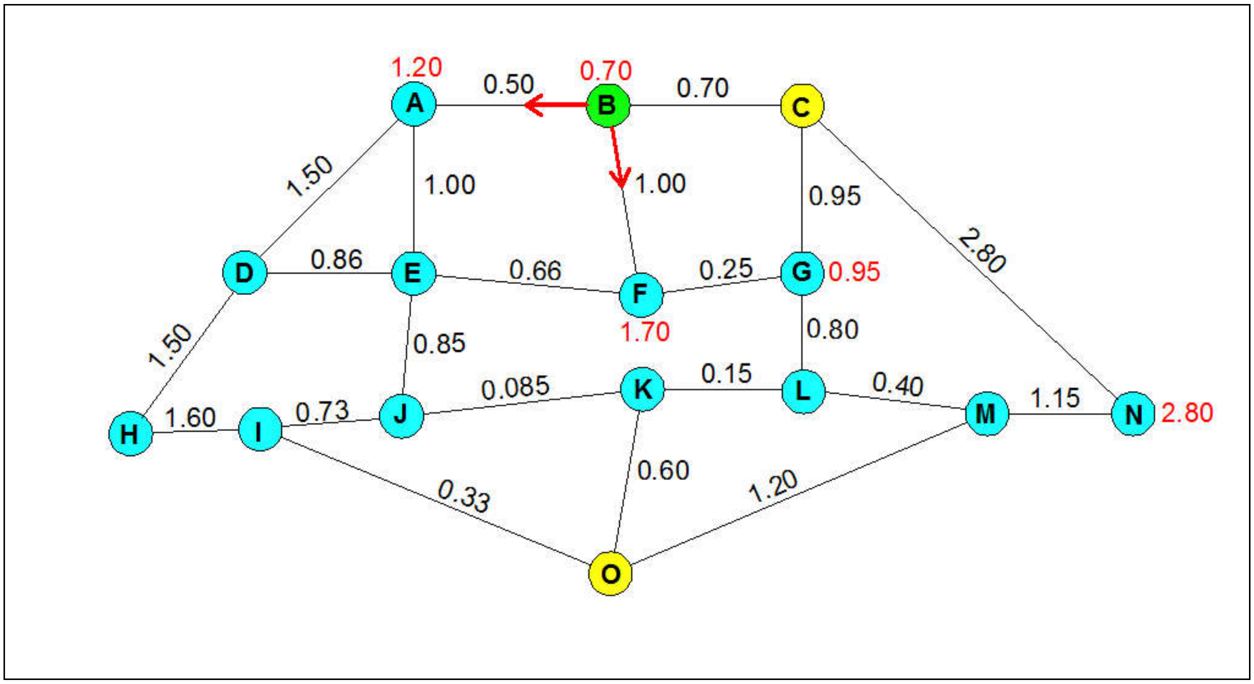



*Figura 4.2.1. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të vogël e cila është 0.95.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 0.95.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit F dhe L) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi G në kulmin F është më e shkurtë 1.20<170, prandaj eliminojmë distancën 1.70.

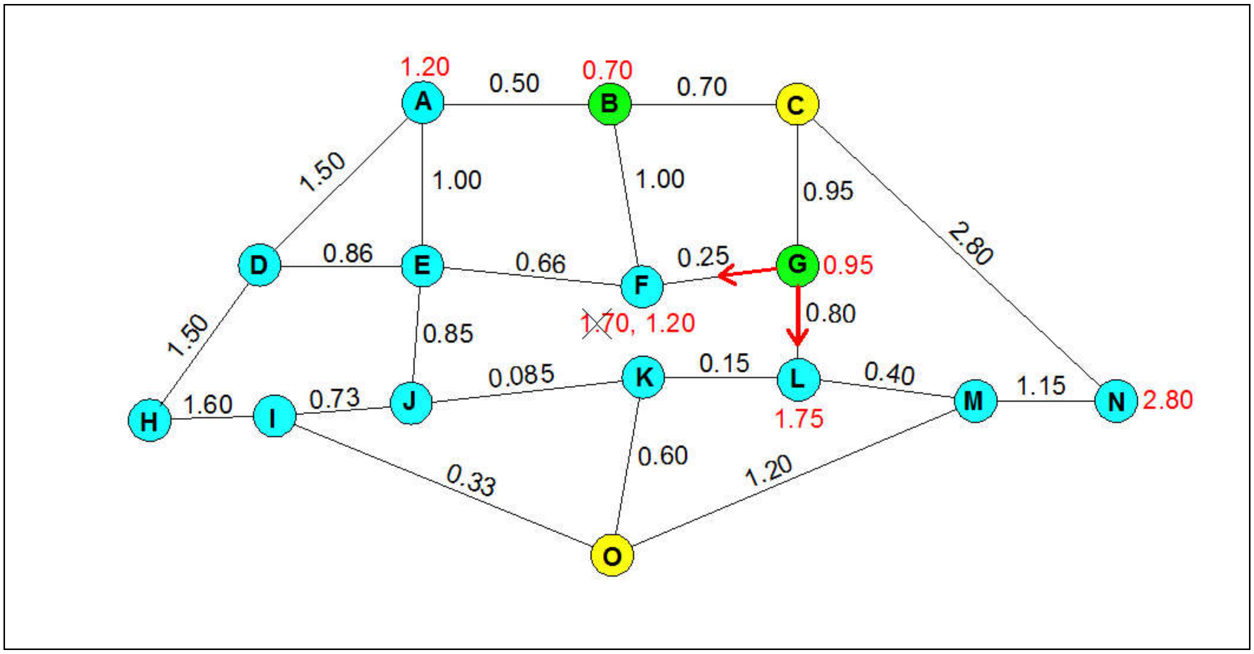



*Figura 4.2.2. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Me që i kem dy kulme (A dhe F) me distancë të njëjtë 1.20, zgjedhim së pari kulmin A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin A me distancën më të vogël e cila është 1.20.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit A me distancë 1.20.

Secilit kulm fqinjë (kulmit D dhe E ) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

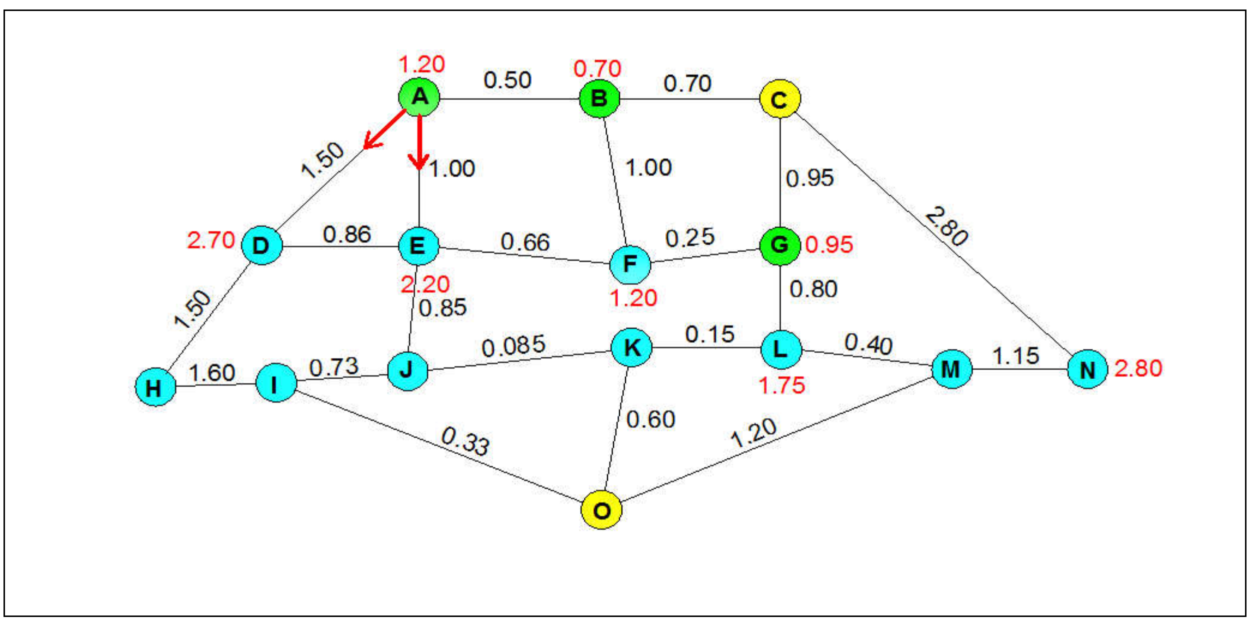



*Figura 4.2.3. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të vogël e cila është 1.20.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 1.20.

Kulmit fqinjë (kulmit E) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi F në kulmin E është më e shkurtë 1.86<2.20, prandaj eliminojmë distancën 2.20.

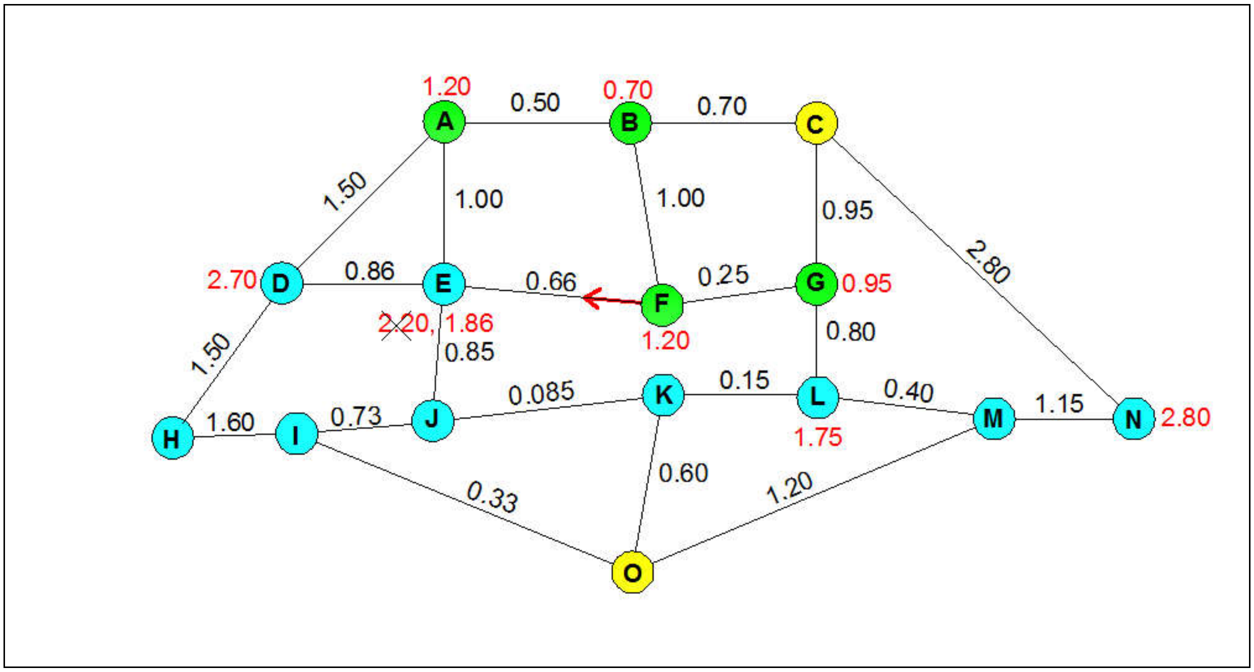



*Figura 4.2.4. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të vogël e cila është 1.75.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 1.75.

Secilit kulm fqinjë (kulmit K dhe M ) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

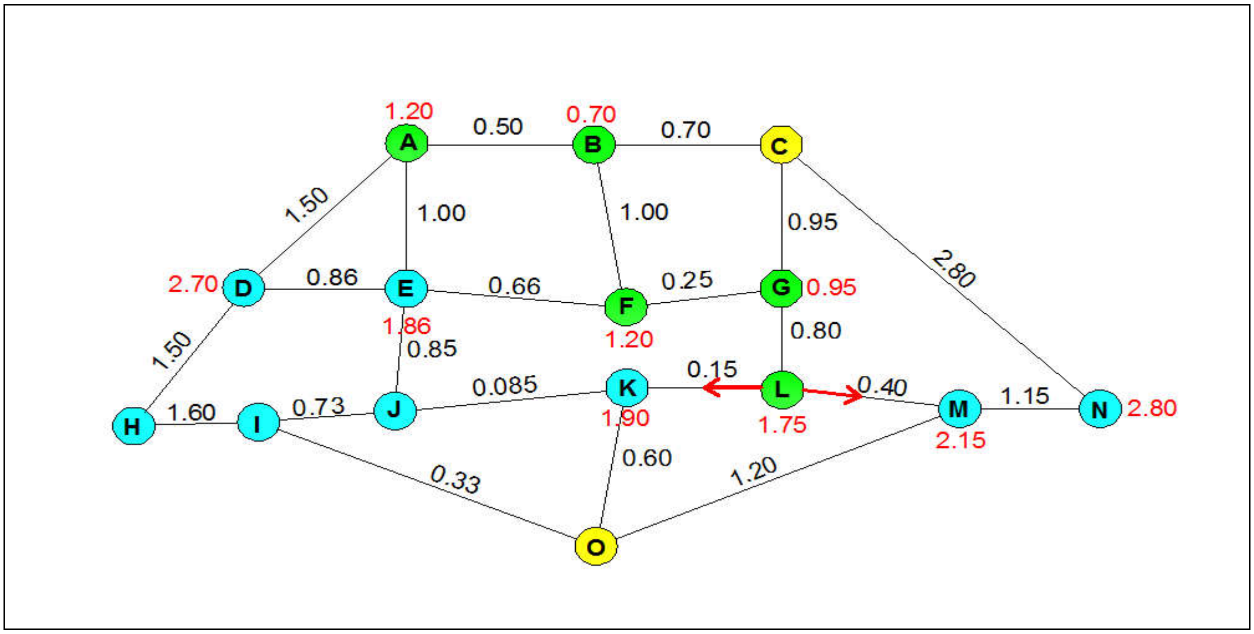



*Figura 4.2.5. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të vogël e cila është 1.86.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 1.86.

Secilit kulm fqinjë (kulmit D dhe J) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi E në kulmin D është 2.72, shohim se 2.72>2.70, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.70 dhe ajo 2.72 nuk merret parasysh.

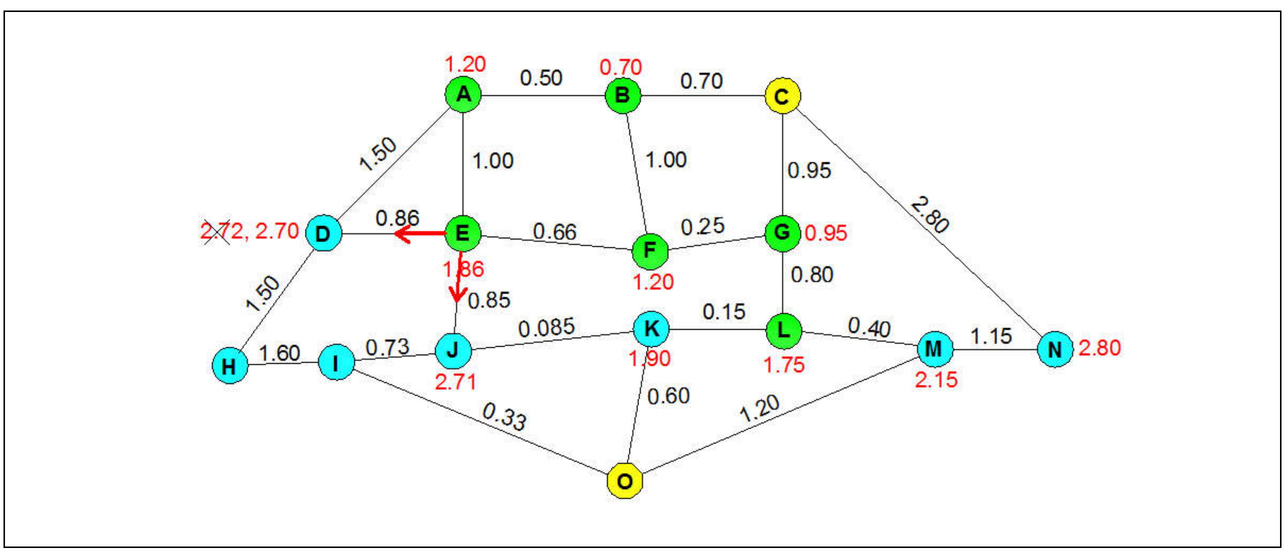



*Figura 4.2.6. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të vogël e cila është 1.90.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 1.90.

Secilit kulm fqinjë (kulmit J dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi K në kulmin J është 3.75, shohim se 3.75>2.71, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.71 dhe ajo 3.75 nuk merret parasysh.

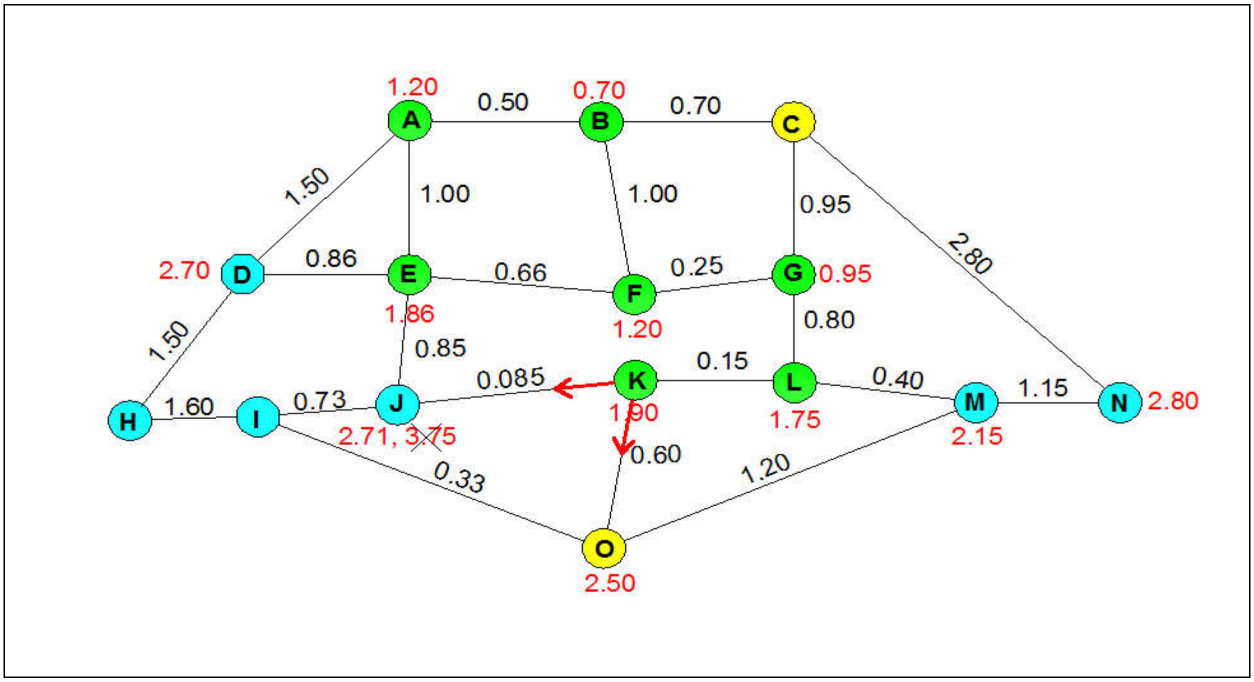



*Figura 4.2.7. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të vogël e cila është 2.15.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 2.15.

Secilit kulm fqinjë (kulmit N dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi M në kulmin N është 3.30, shohim se 3.30>2.80, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.80 dhe ajo 3.30 nuk merret parasysh.

Gjithashtu vërejmë se distanca nga kulmi M në kulmin O ështe 3.35, shohim se 3.35>2.50, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.50 dhe ajo 3.35 nuk merret parasysh.

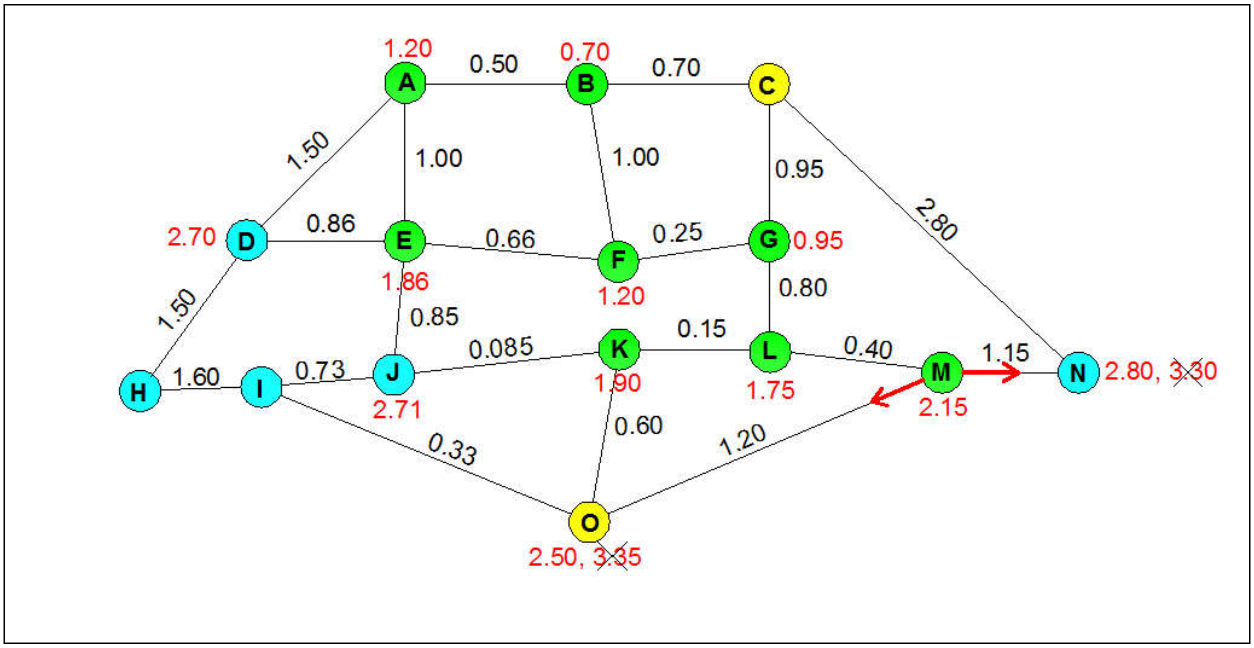



*Figura 4.2.8. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin D me distancën më të vogël e cila është 2.70.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 2.70.

Kulmit fqinjë (kulmit H) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

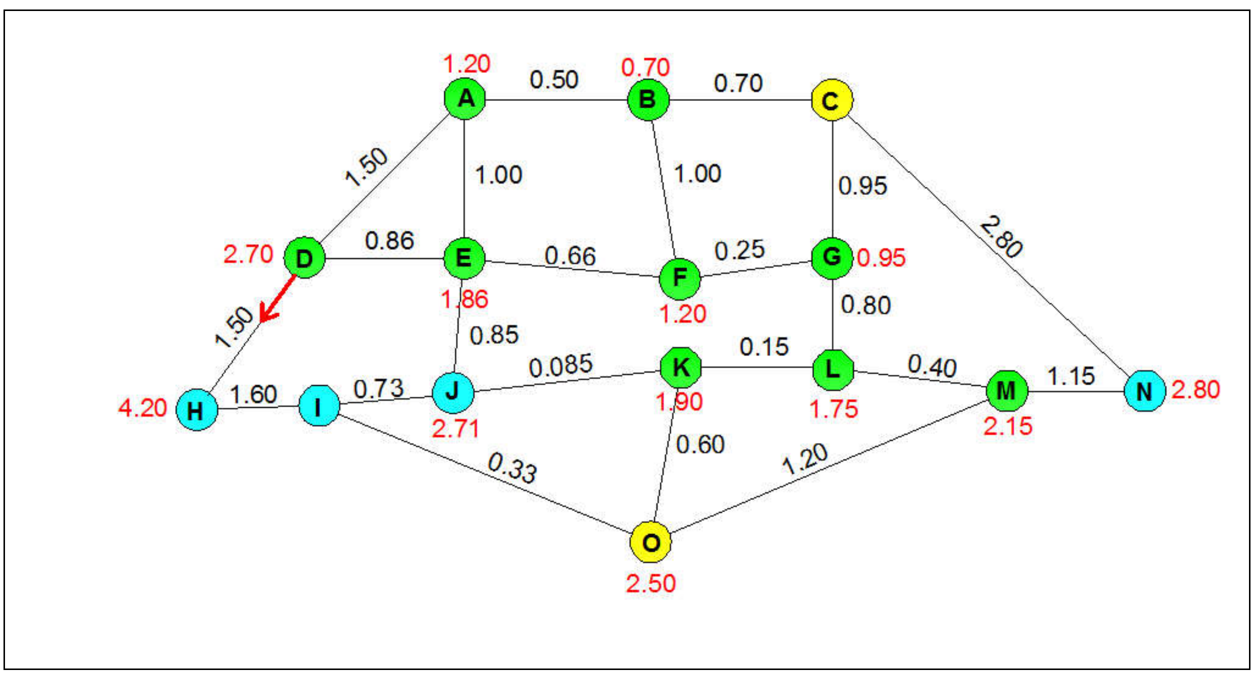



*Figura 4.2.9. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të vogël e cila është 2.71.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 2.71.

Kulmit fqinjë (kulmit I) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

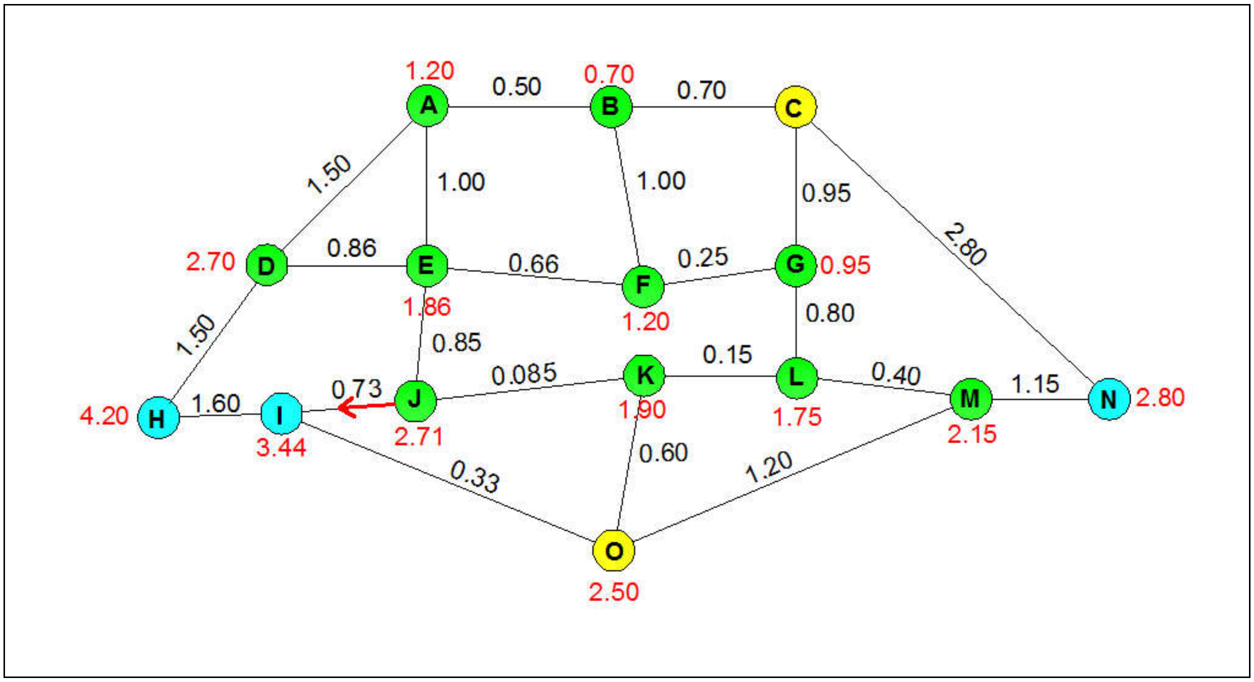



*Figura 4.2.10. Rruga më e shkurtë C-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të vogël e cila është 3.44.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 3.44.

Secilit kulm fqinjë (kulmit H dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi I në kulmin H është 3.35, shohim se 5.04>4.20, prandaj mbetet distanca e mëparshme 4.20 dhe ajo 5.04 nuk merret parasysh.

Gjithashtu vërejmë se distanca nga kulmi I në kulmin O është 3.77, shohim se 3.77>2.50, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.50 dhe ajo 3.77 nuk merret parasysh.

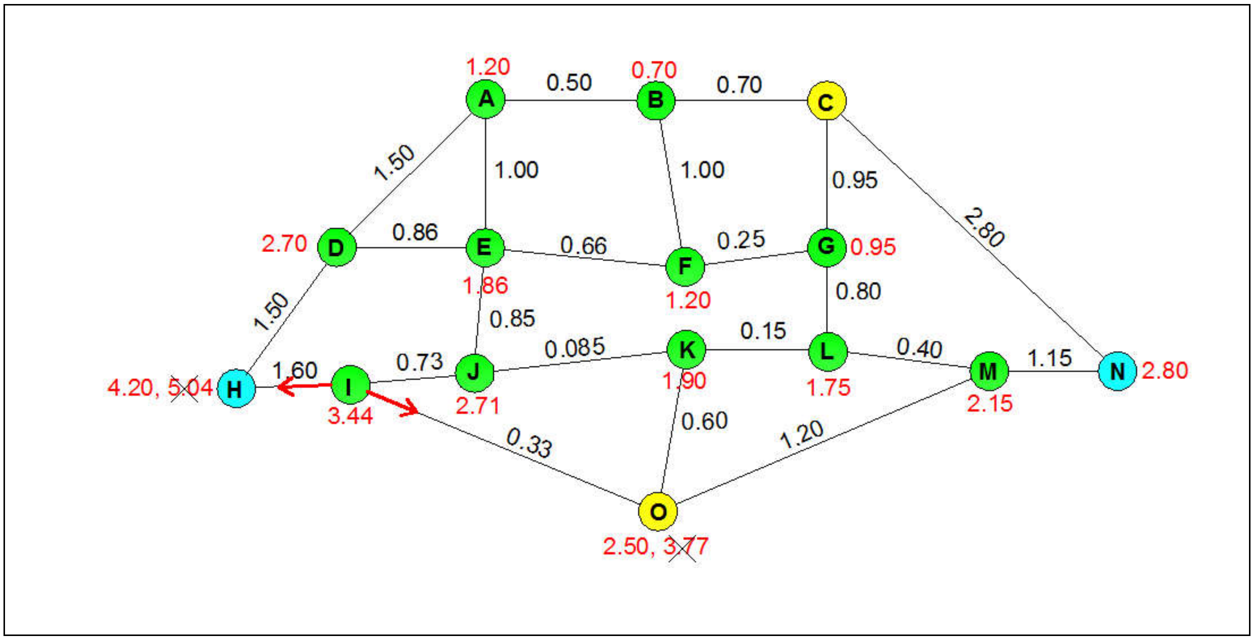



*Figura 4.2.11. Rruga më e shkurtë C-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e më poshtme.

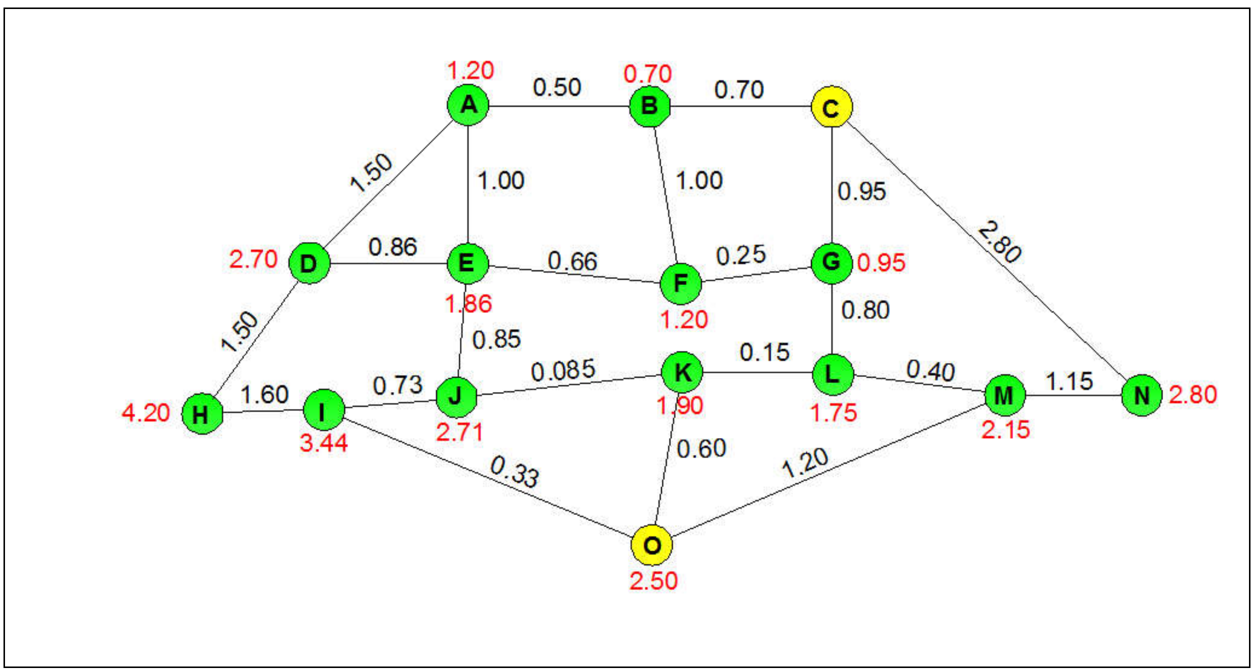


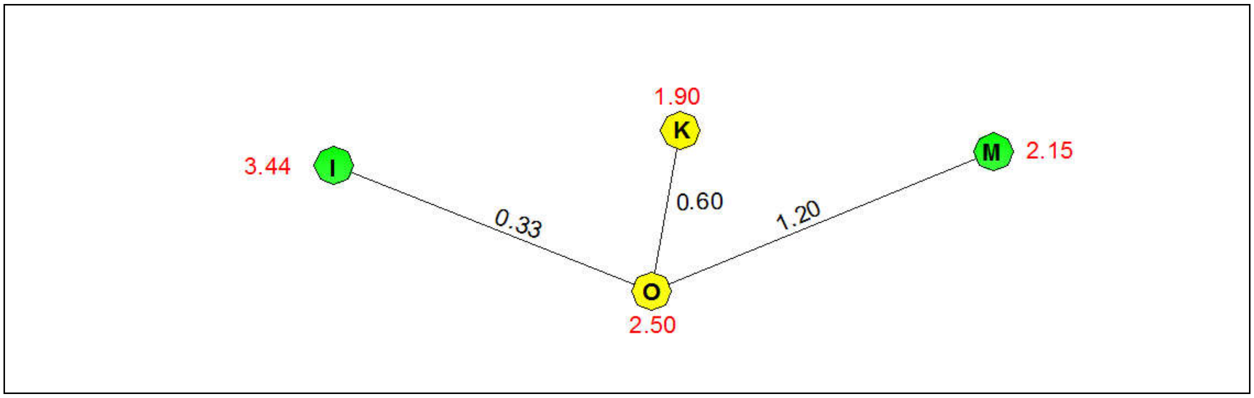

*Figura 4.2.12. Rruga më e shkurtë C-O.*

**Llogaritja e rrugës minimale C-O.**

Tani mund të llogaritim rrugën minimale prej kulmit C në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$2.50-0.33\neq 3.44$$
$$2.50-0.60=1.90\surd$$
$$2.50-1.20\neq 2.15$$



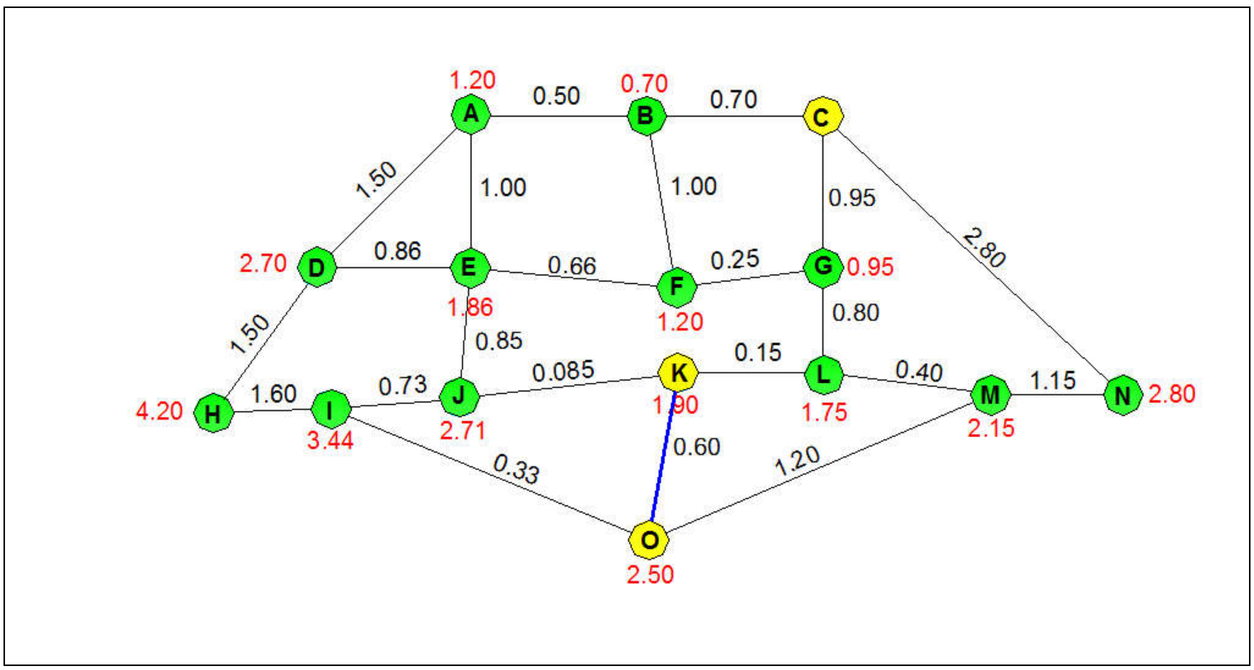
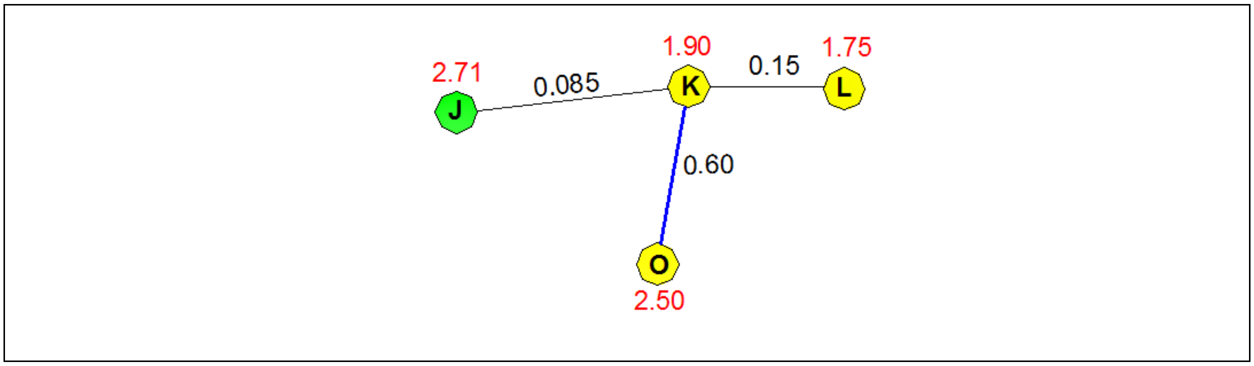




*Figura 4.2.13. Llogaritja e rrugës më të shkurtë C-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë. Tani prej kulmit K zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$1.90-0.085\neq 2.71$$
$$1.90-0.15=1.75\surd$$



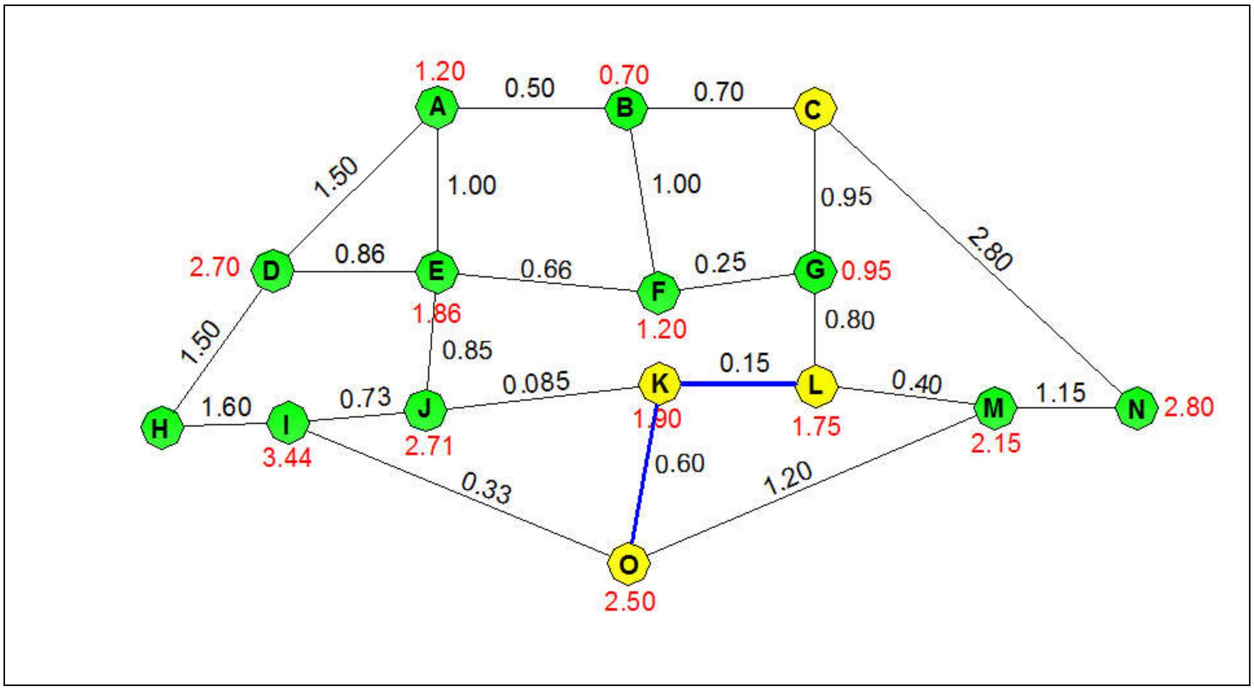
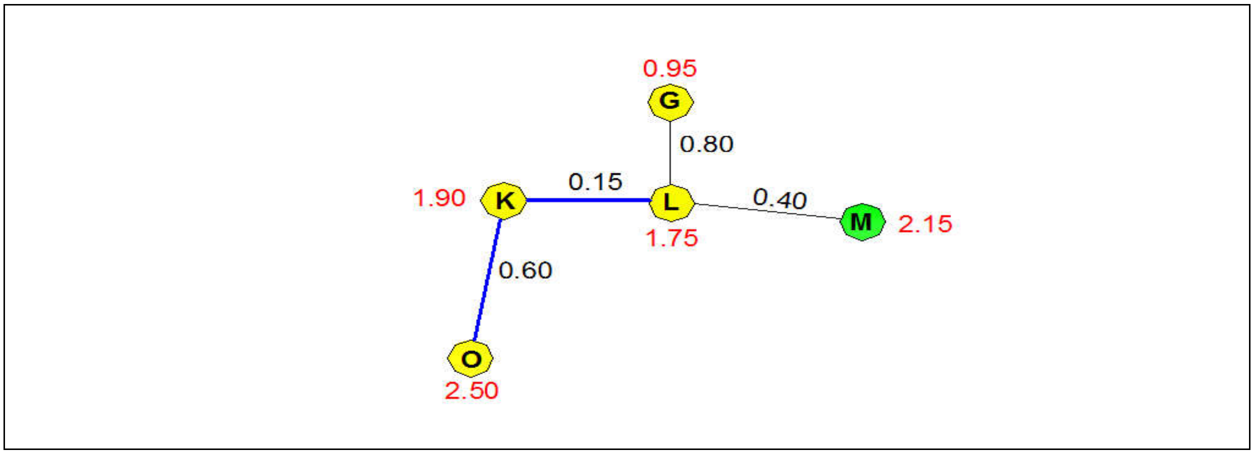




*Figura 4.2.14. Llogaritja e rrugës më të shkurtë C-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$1.75-0.80=0.95\surd$$

$$1.75-0.40\neq 2.15$$



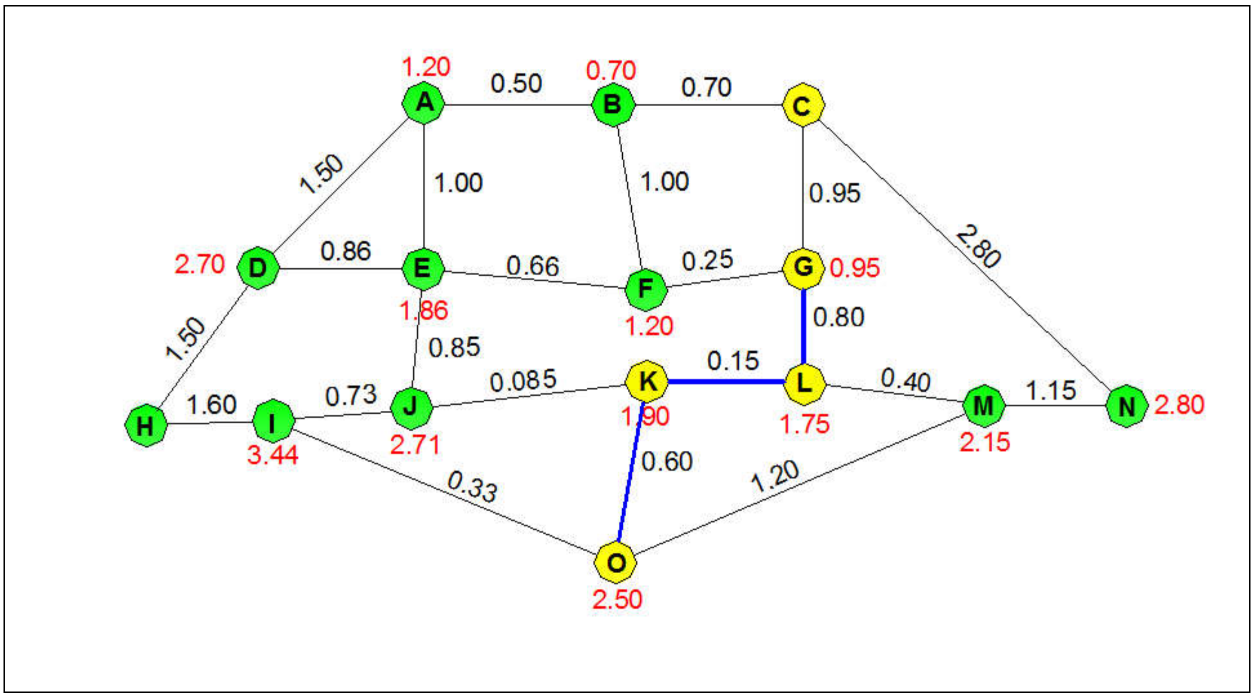
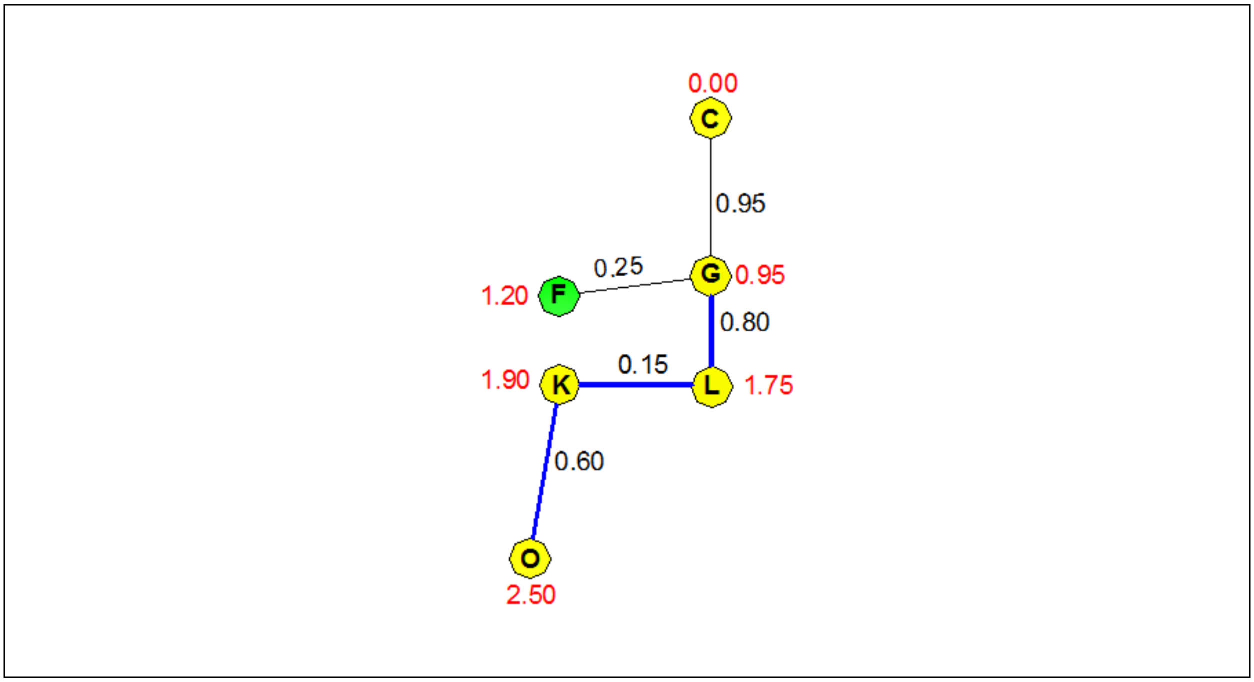




*Figura 4.2.15. Llogaritja e rrugës më të shkurtë C-O.*

Pastaj prej kulmit G zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$0.95-0.25 \neq 1.20$$

$$0.95-0.95=0.00\surd$$



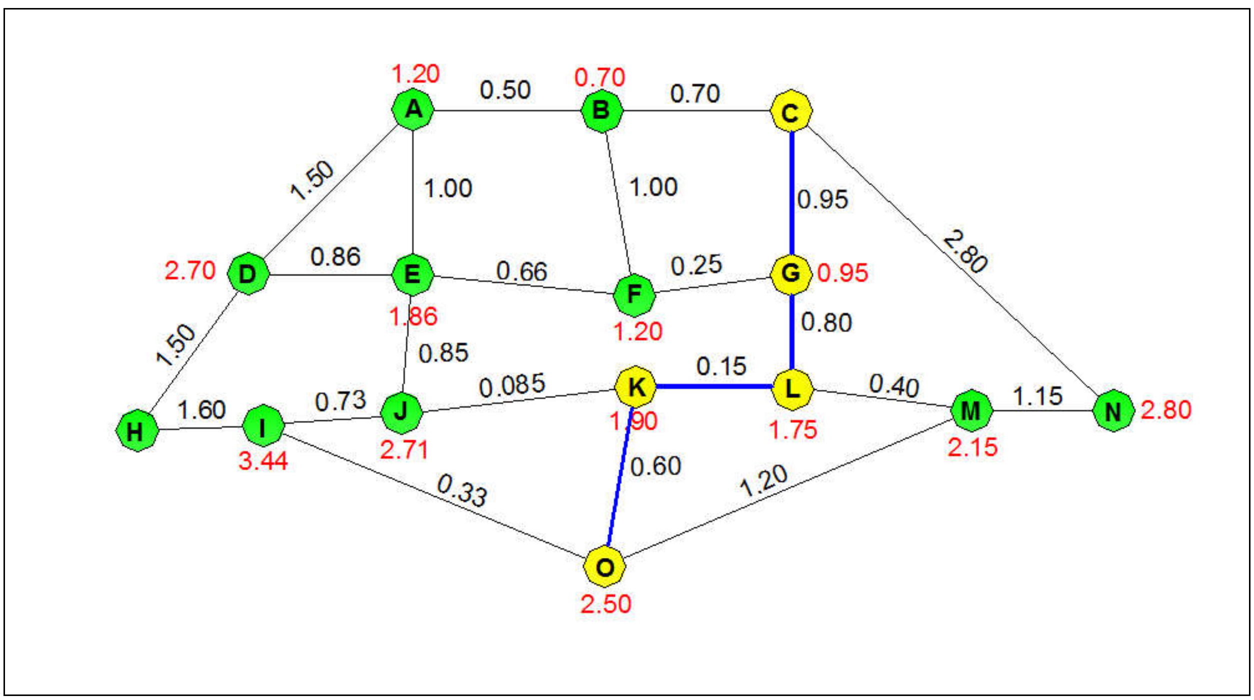




*Figura 4.2.16. Llogaritja e rrugës më të shkurtë C-O.*

Rruga me gjatësinë më të shkurtë është rruga C-G-L-K-O me gjatësi 2.50[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e shkurtë prej kulmit C-O e paraqitur në hartë.

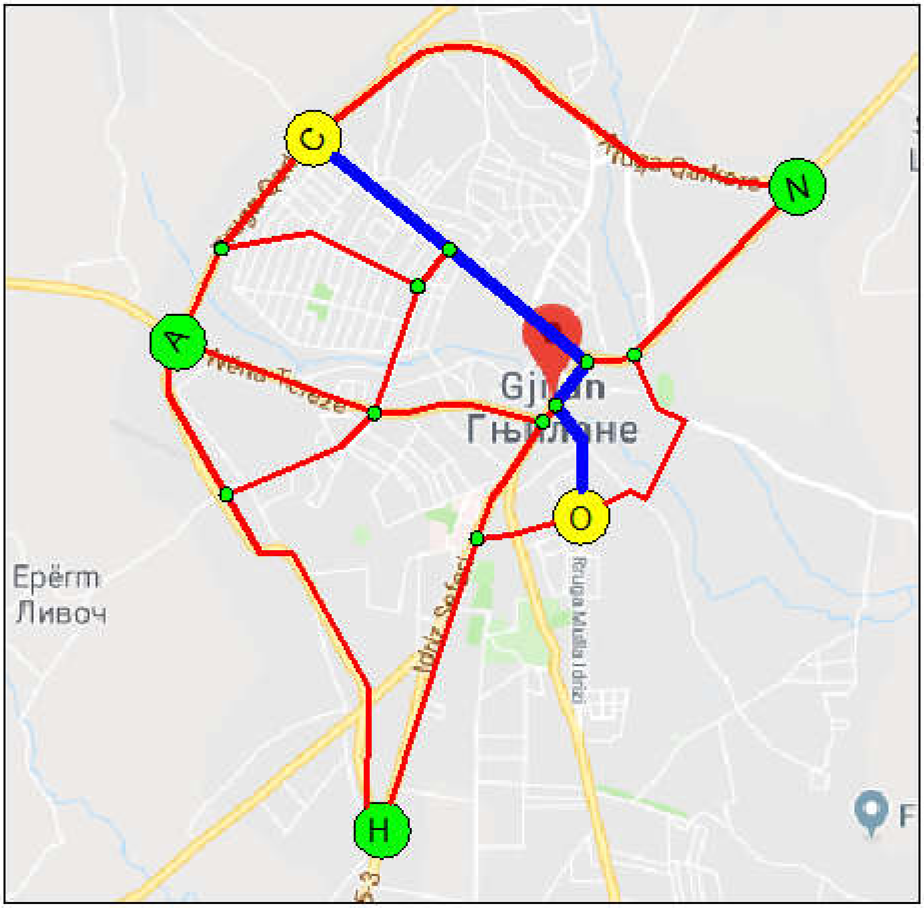



*Figura 4.2.17. Rruga më e shkurtë C-O e paraqitur në hartë.*

## 4.3. RRUGA MË E SHKURTË PREJ KULMIT H NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MINIMALE

Së pari fillojmë nga kulmi H duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi H në kulmet (D dhe I).

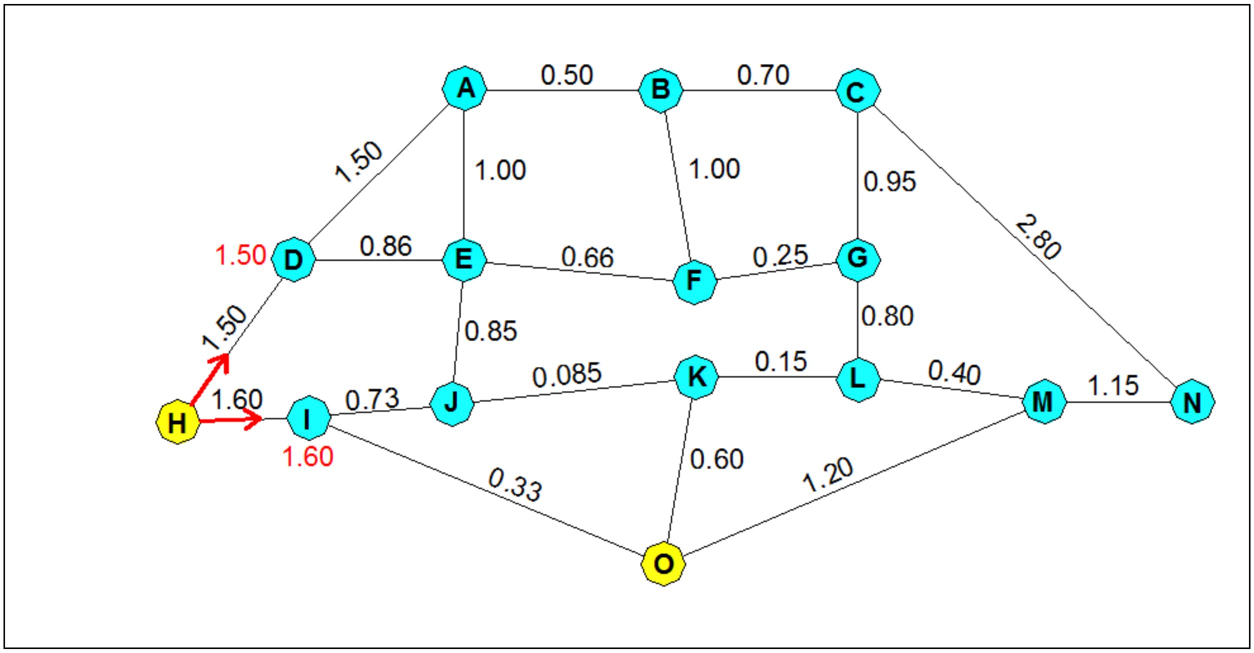



*Figura 4.3.0. Rruga më e shkurtë H-O.*

Distanca më e vogël prej kulmit H në kulmet fqinjë (D dhe I) është 1.50.

Pastaj kulmin D me distancën 1.50 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 1.50.

Secilit kulm fqinjë (kulmit A dhe E) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

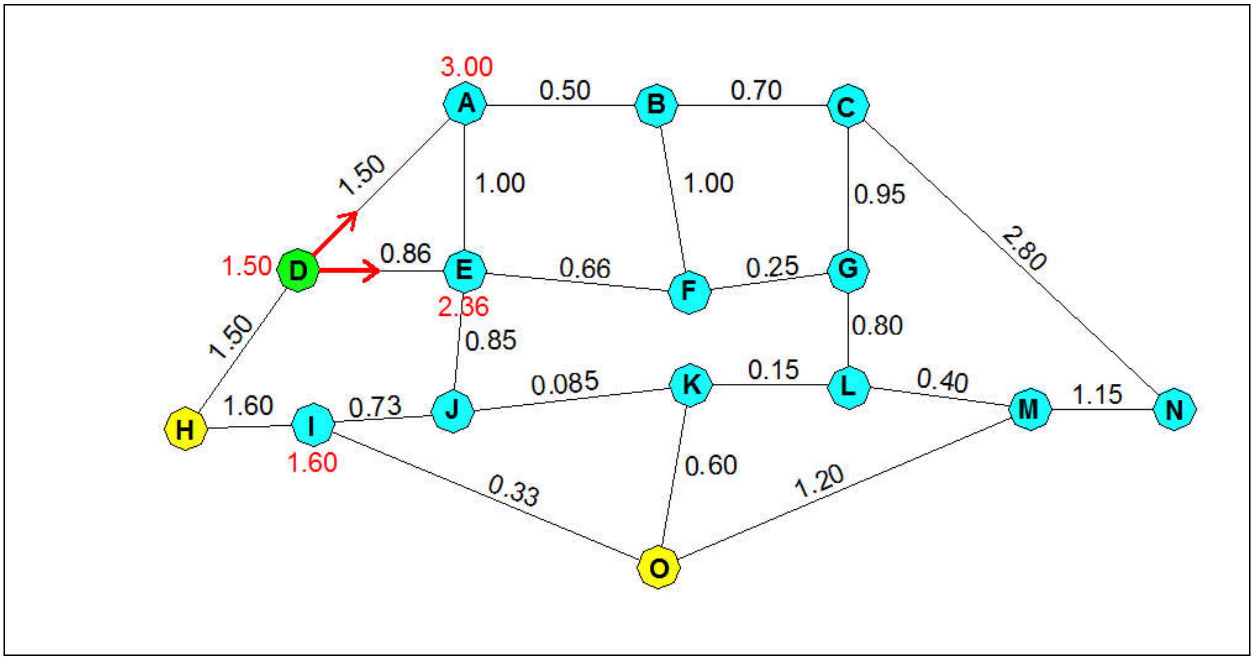



*Figura 4.3.1. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të vogël e cila është 1.60.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 1.60.

Secilit kulm fqinjë (kulmit J dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

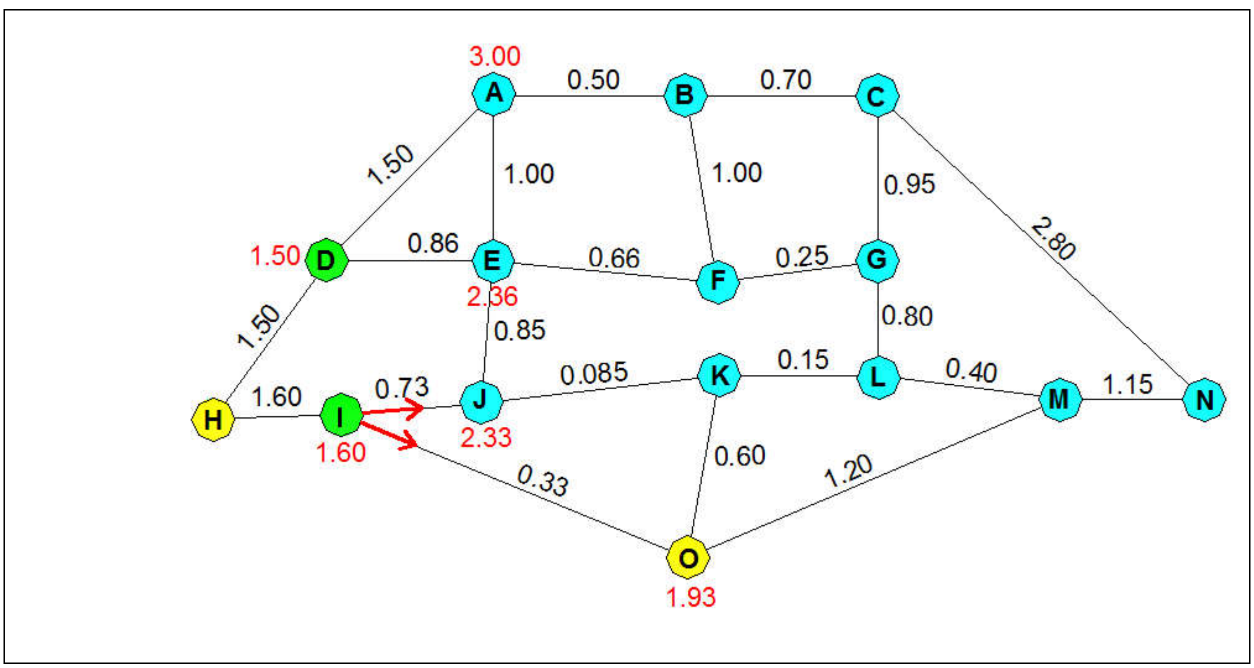



*Figura 4.3.2. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të vogël e cila është 2.33.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 2.33.

Secilit kulm fqinjë (kulmit E dhe K) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi J në kulmin E është 3.18, shohim se 3.18>2.36, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.36 dhe ajo 3.18 nuk merret parasysh.

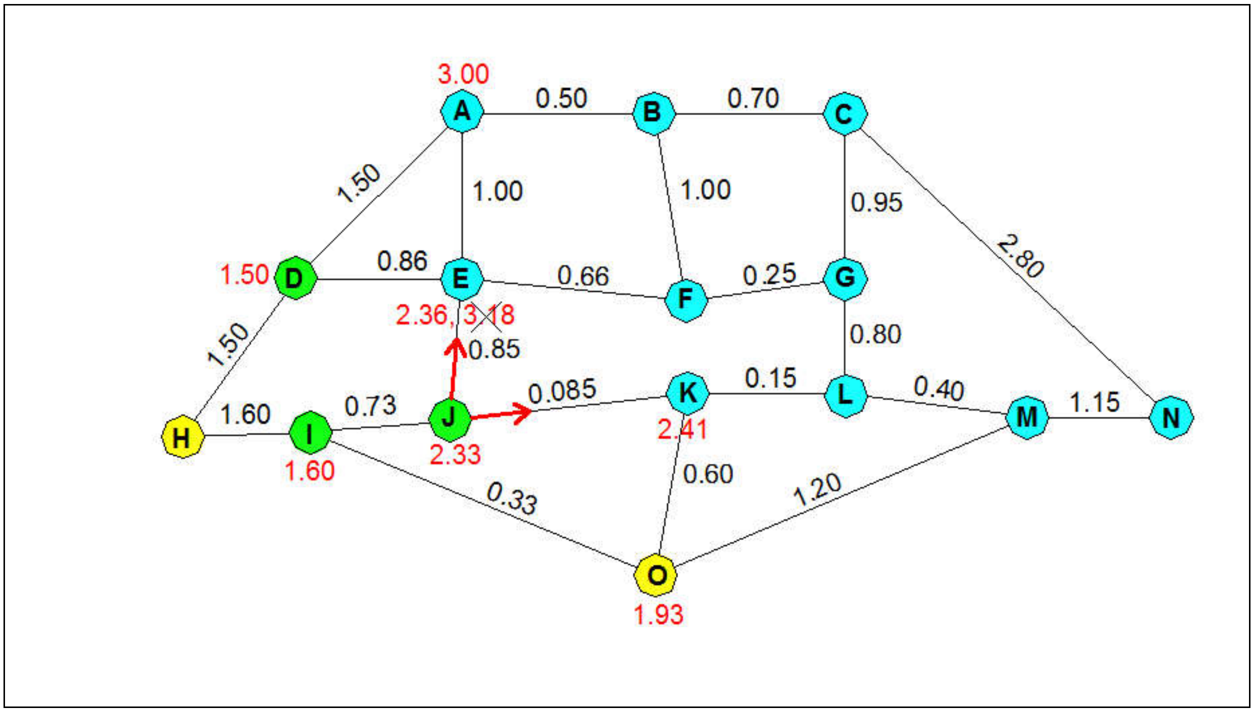



*Figura 4.3.3. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të vogël e cila është 2.36.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 2.36.

Secilit kulm fqinjë (kulmit A dhe F) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi E në kulmin A është 3.36, shohim se 3.36>3.00, prandaj mbetet distanca e mëparshme 3.00 dhe ajo 3.36 nuk merret parasysh.

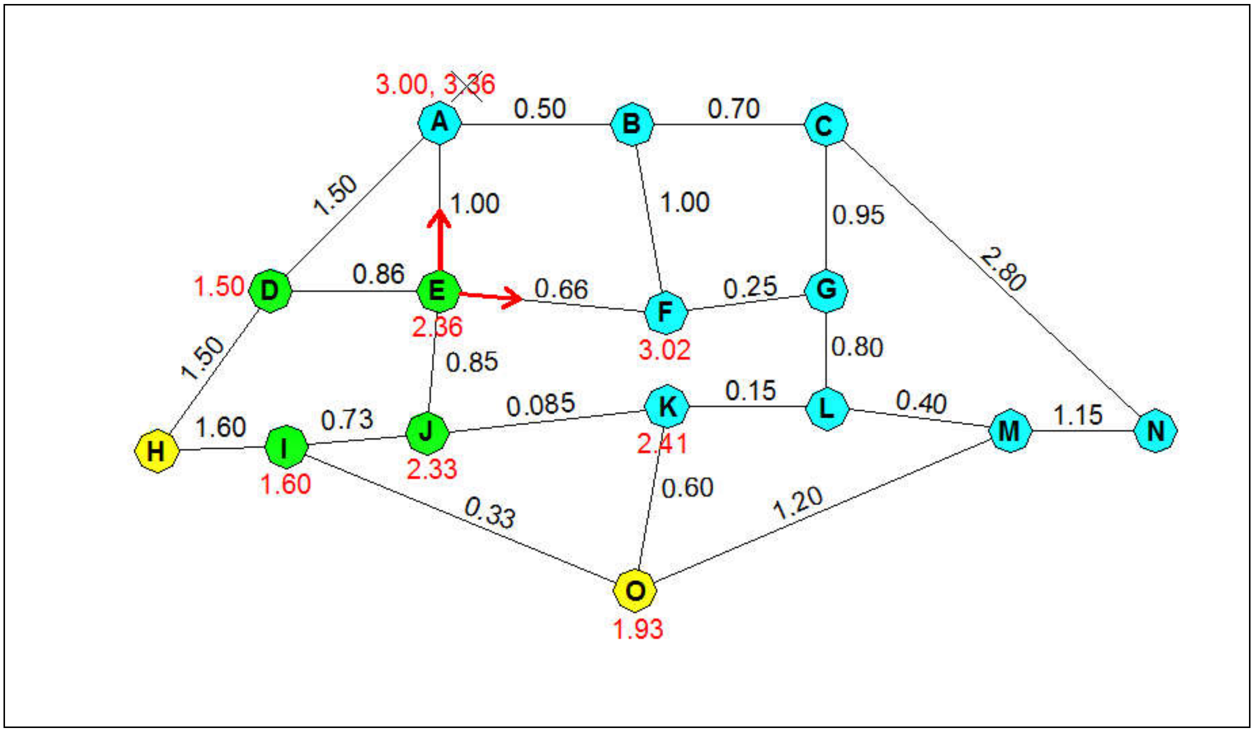



*Figura 4.3.4. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të vogël e cila është 2.41.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 2.41.

Secilit kulm fqinjë (kulmit L dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi K në kulmin O është 3.01, shohim se 3.01>1.93, prandaj mbetet distanca e mëparshme 1.93 dhe ajo 3.01 nuk merret parasysh.

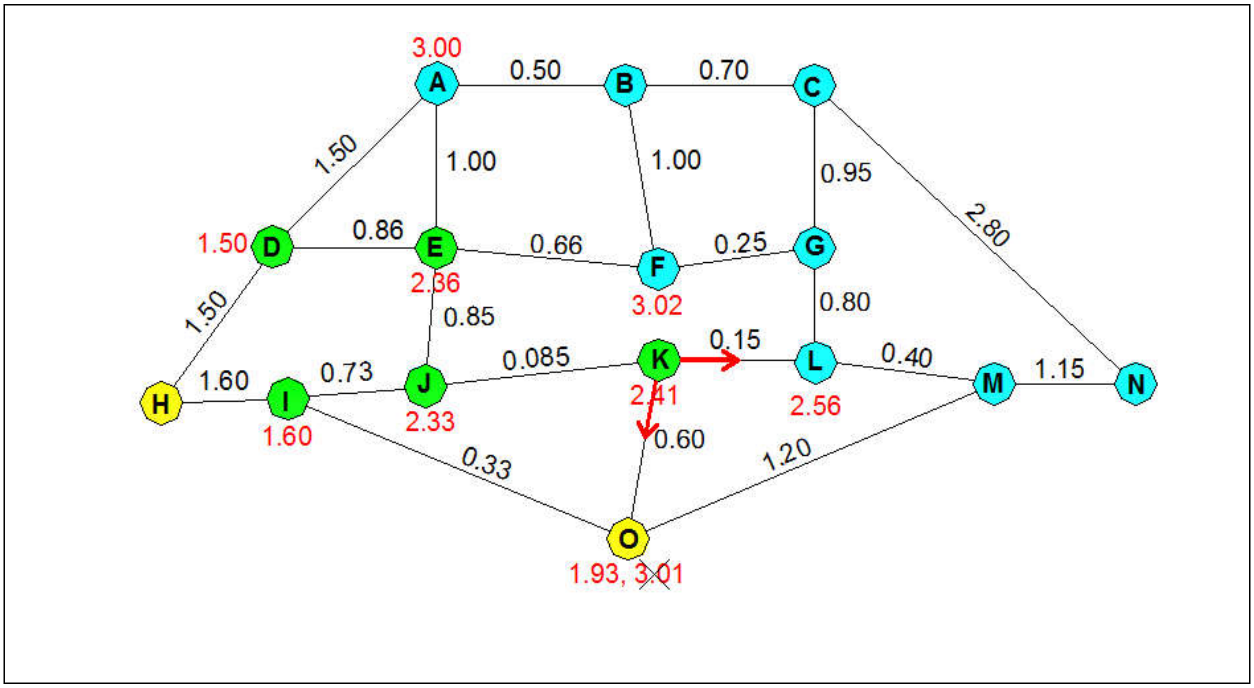



*Figura 4.3.5. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të vogël e cila është 2.56.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 2.56.

Secilit kulm fqinjë (kulmit G dhe M) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

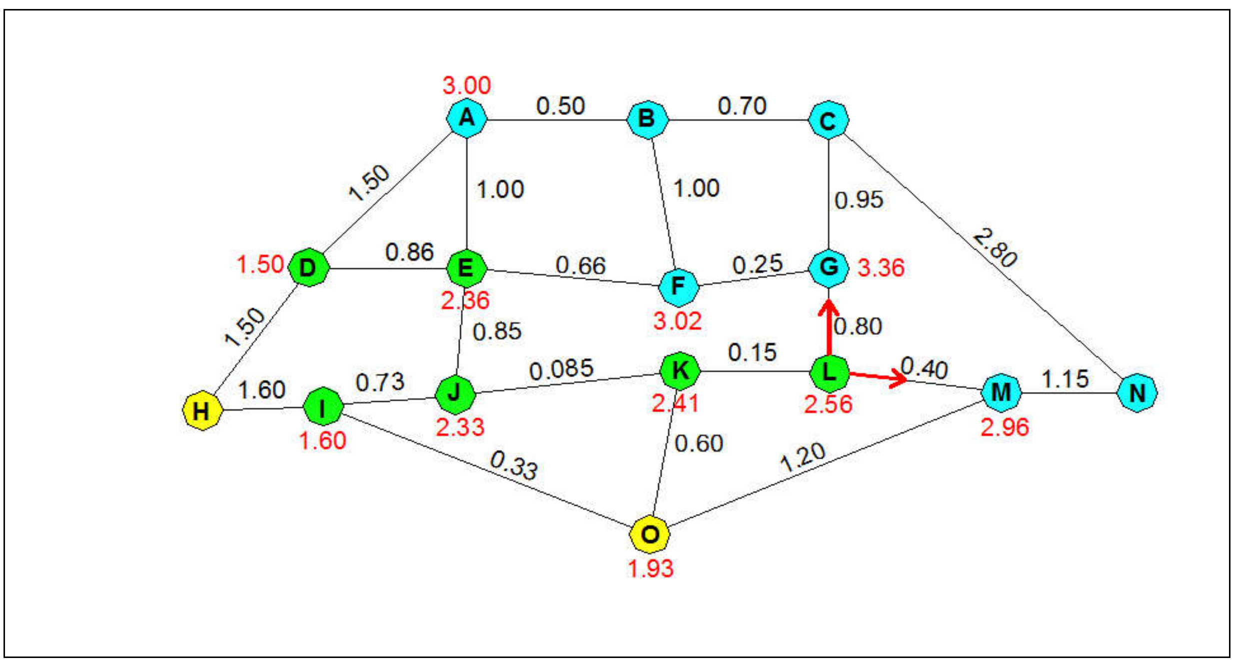



*Figura 4.3.6. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të vogël e cila është 2.96.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 2.96.

Secilit kulm fqinjë (kulmit N dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi M në kulmin O është 4.16, shohim se 4.16>1.93, prandaj mbetet distanca e mëparshme 1.93 dhe ajo 4.16 nuk merret parasysh.

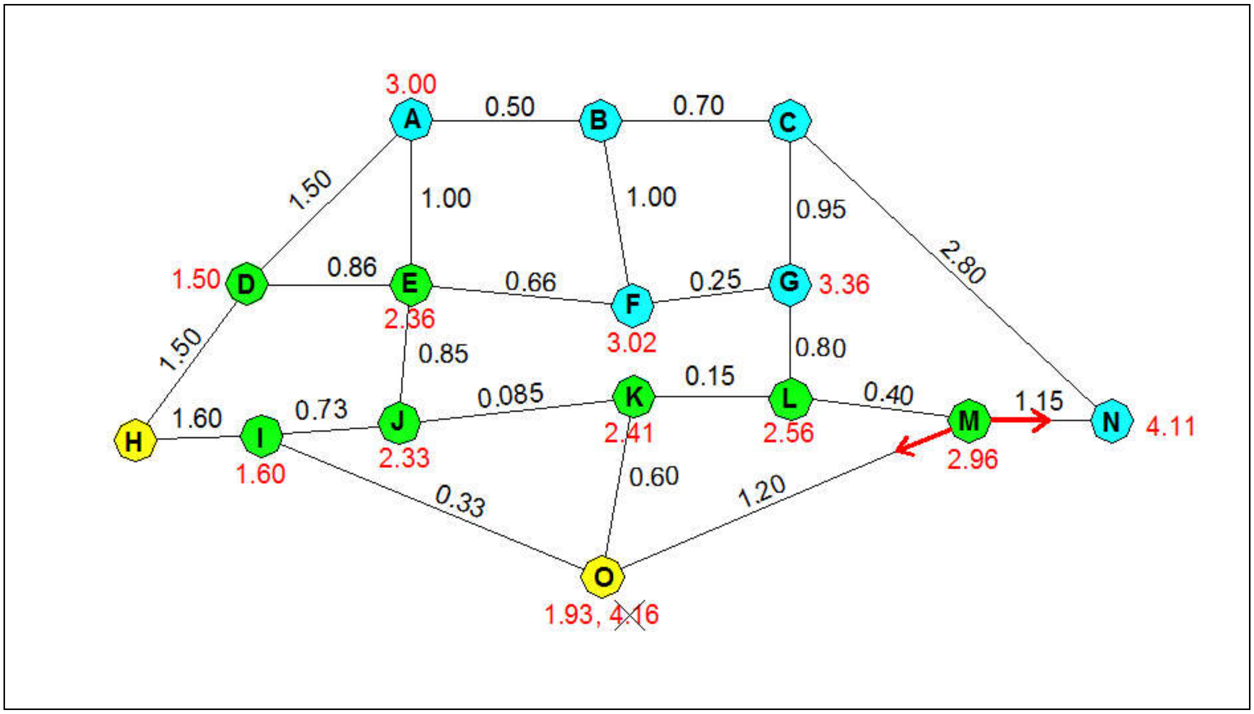



*Figura 4.3.7. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin A me distancën më të vogël e cila është 3.00.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit A me distancë 3.00.

Kulmit fqinjë (kulmit B) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

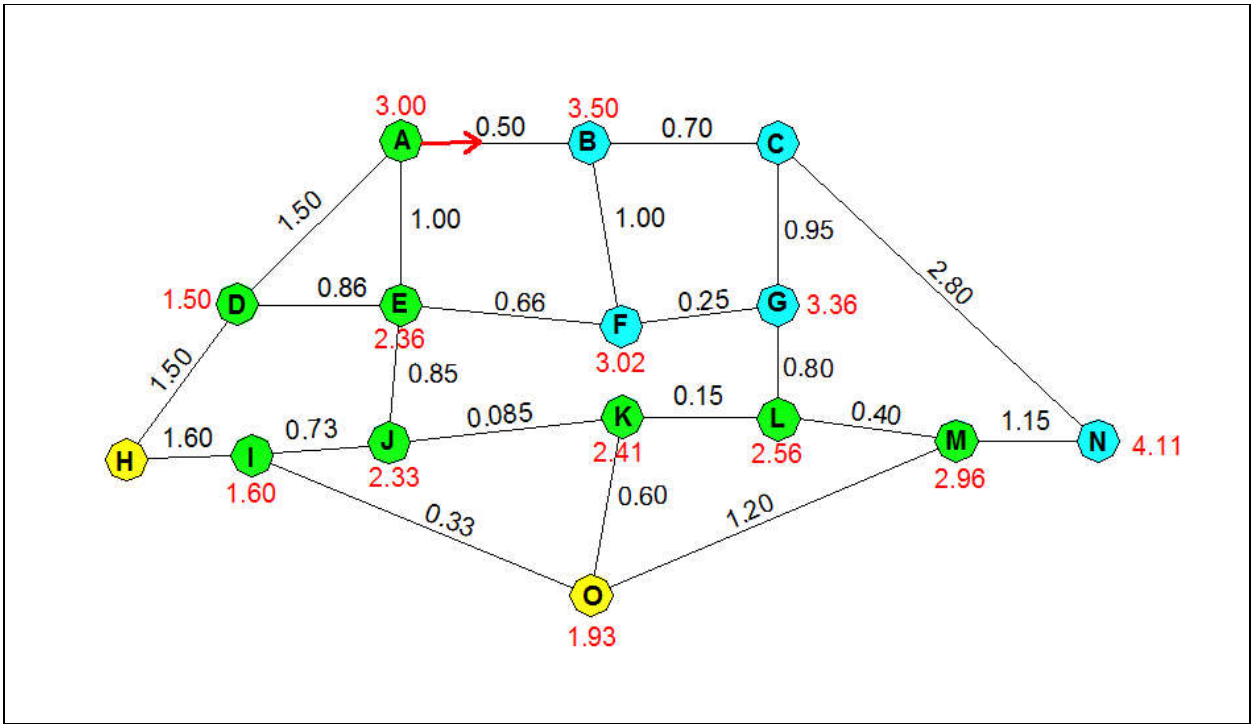



*Figura 4.3.8. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të vogël e cila është 3.02.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 3.02.

Secilit kulm fqinjë (kulmit B dhe G) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi F në kulmin B është më 4.02, shohim se 4.02>3.50, prandaj mbetet distanca e mëparshme 3.50 dhe ajo 4.02 nuk merret parasysh.

Gjithasshtu vërejmë se distanca nga kulmi F në kulmin G është më e shkurtë 3.27<3.36, prandaj eliminojmë distancën 3.36.

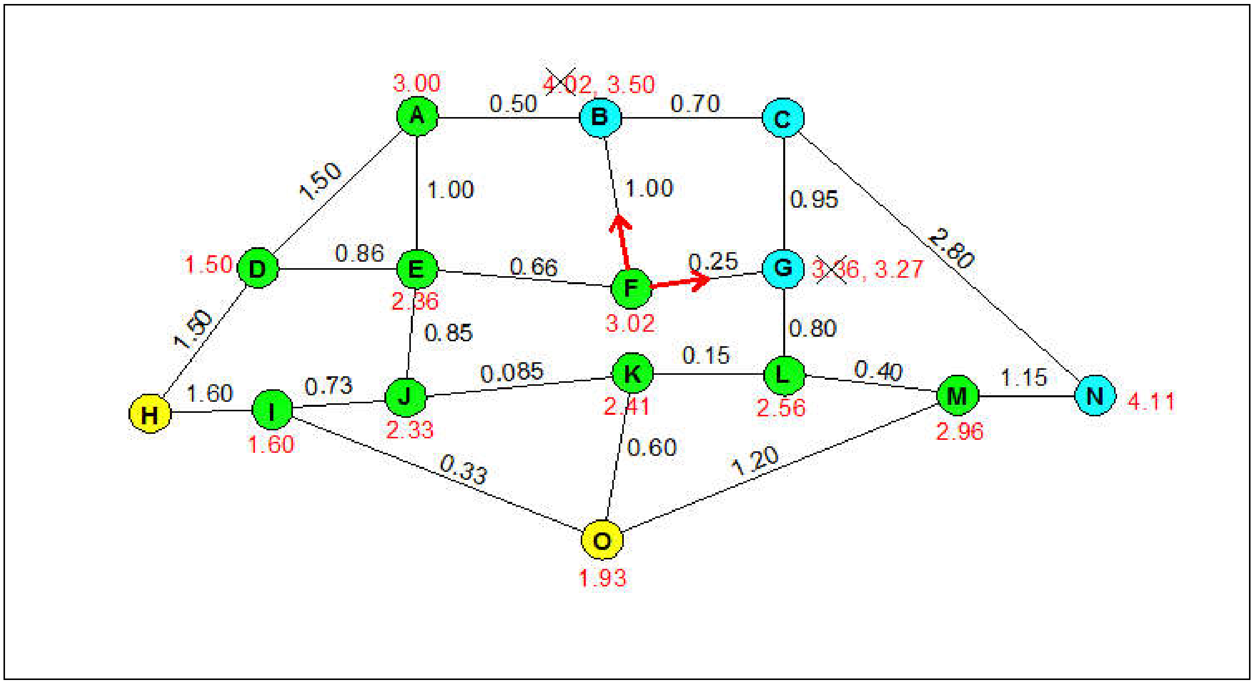



*Figura 4.3.9. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të vogël e cila është 3.27.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 3.27.

Kulmi fqinjë (kulmit C) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

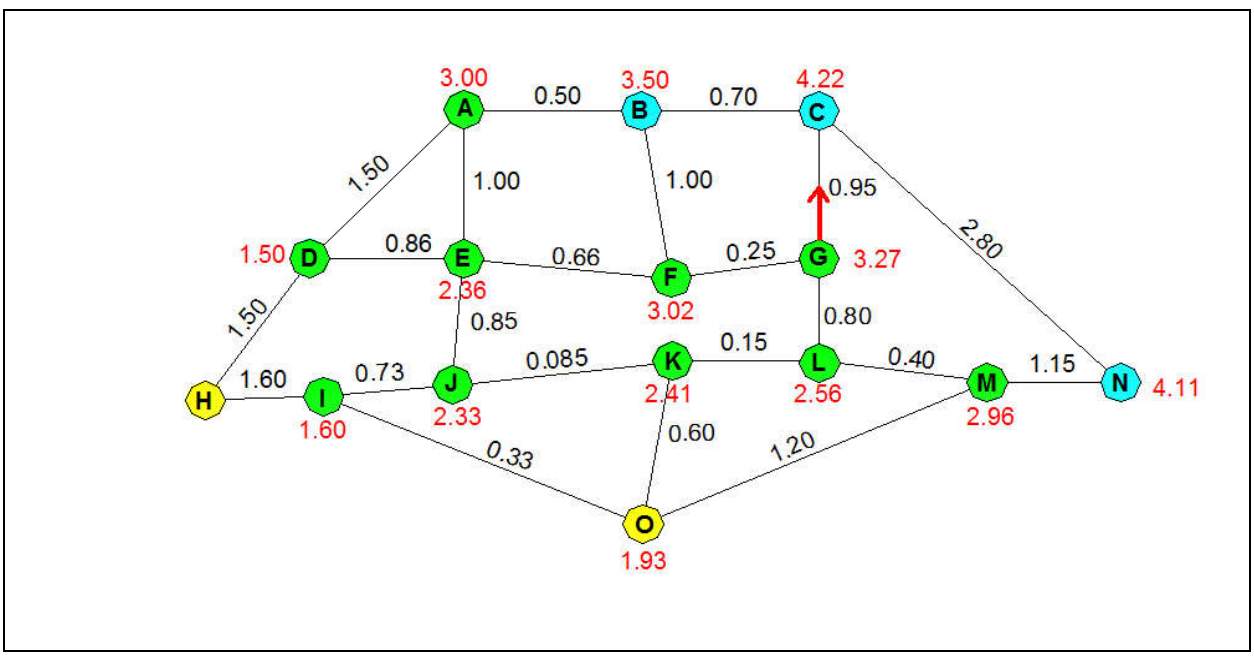



*Figura 4.3.10. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin B me distancën më të vogël e cila është 3.50.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 3.50.

Kulmi fqinjë (kulmit C) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi B në kulmin C është më e shkurtë 4.20<4.22, prandaj eliminojmë distancën 4.22.

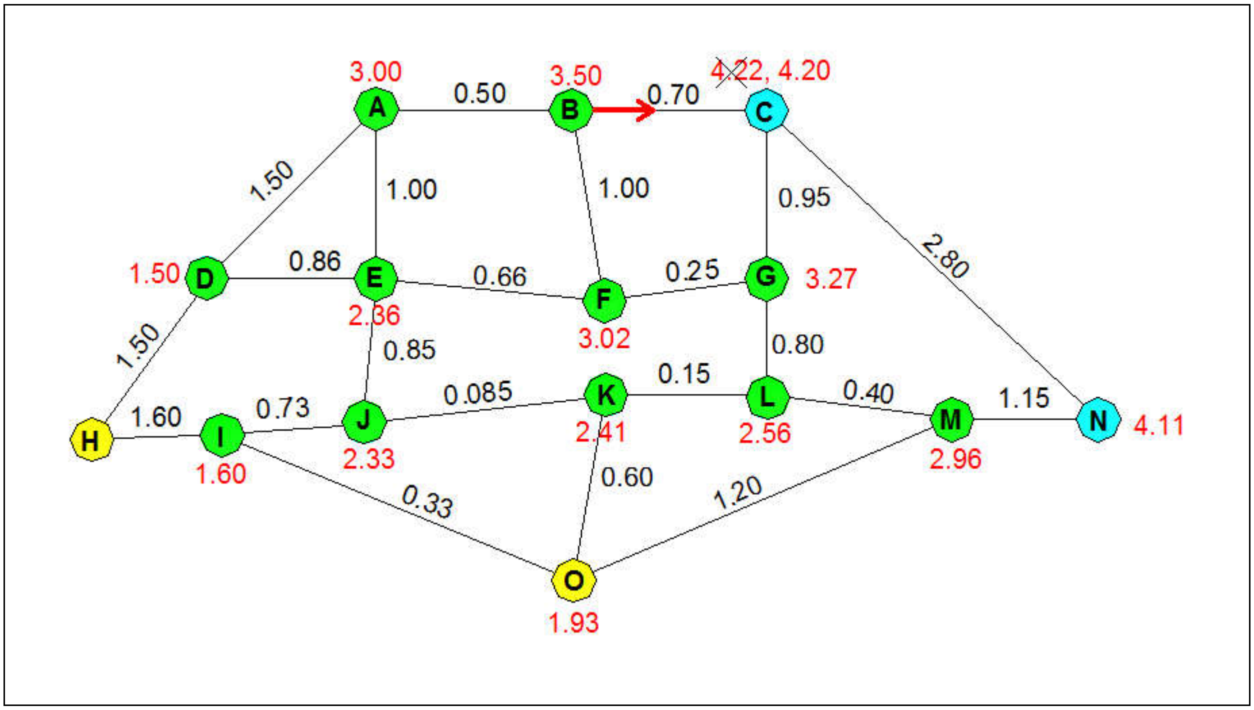



*Figura 4.3.11. Rruga më e shkurtë H-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin N me distancën më të vogël e cila është 4.11.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit N me distancë 4.11.

Kulmi fqinjë (kulmit C) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi N në kulmin C është 6.91, shohim se 6.91>4.20, prandaj mbetet distanca e mëparshme 4.20 dhe ajo 6.91 nuk merret parasysh.

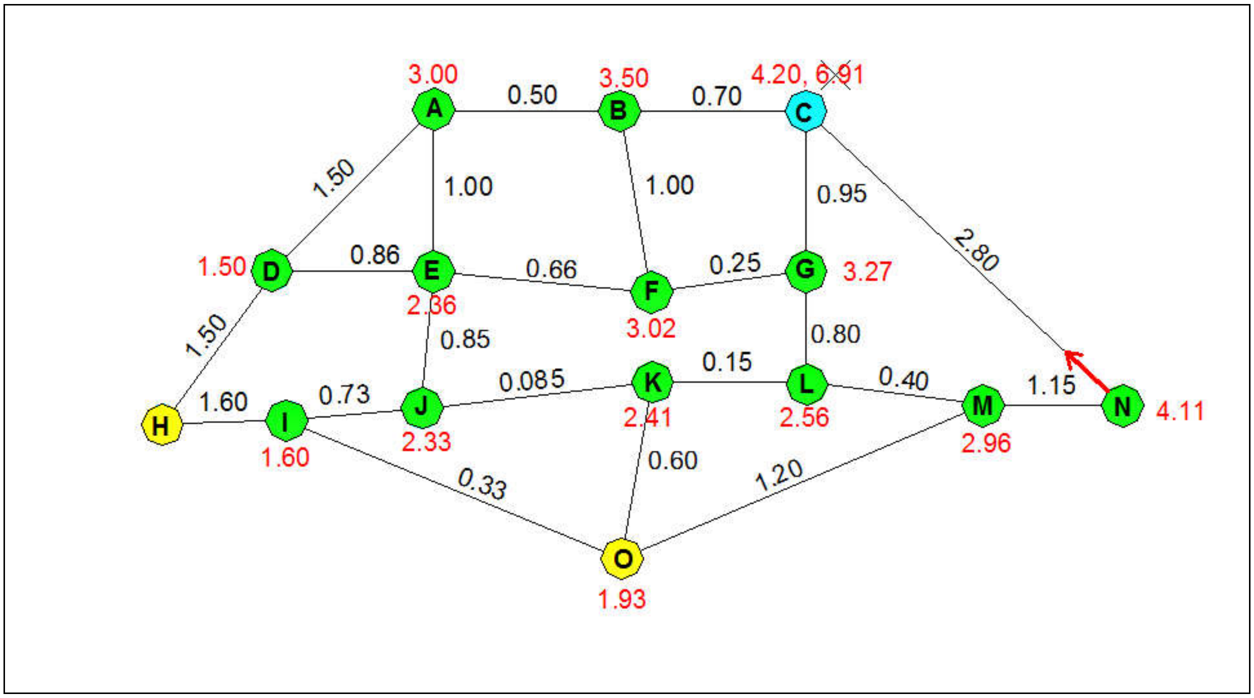



*Figura 4.3.12. Rruga më e shkurtë H-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

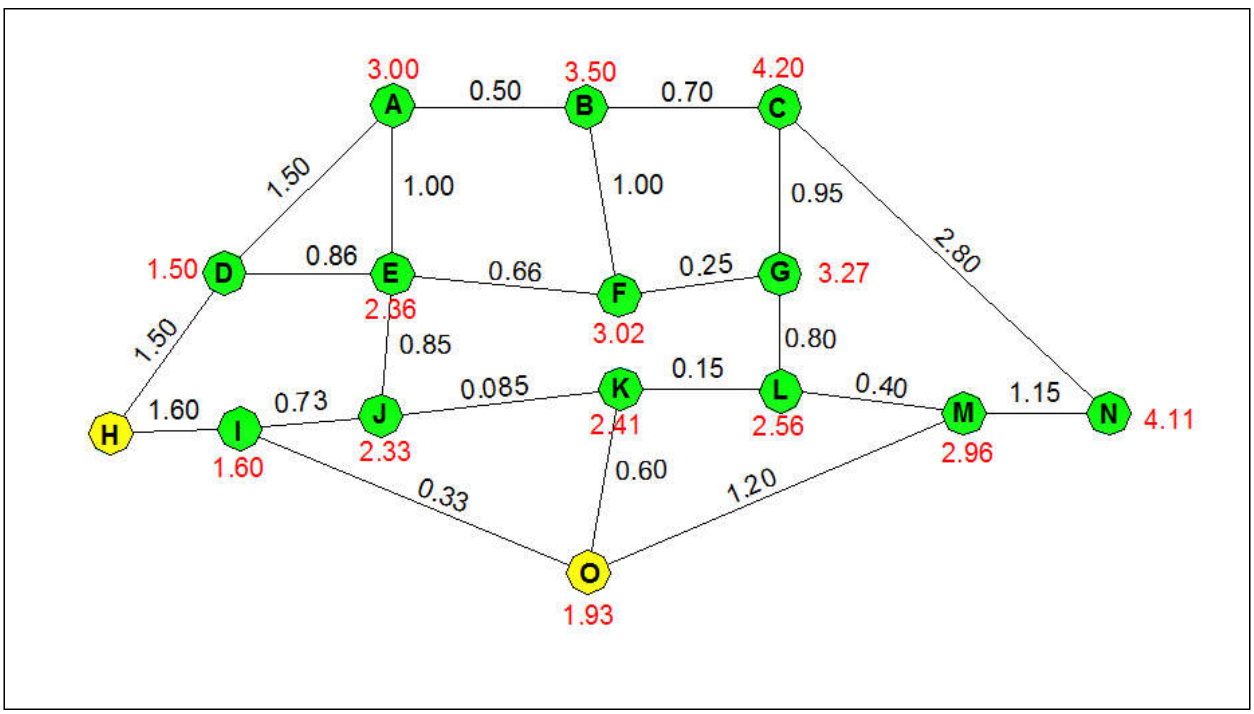



*Figura 4.3.13. Rruga më e shkurtë H-O.*

**Llogaritja e rrugës minimale H-O.**

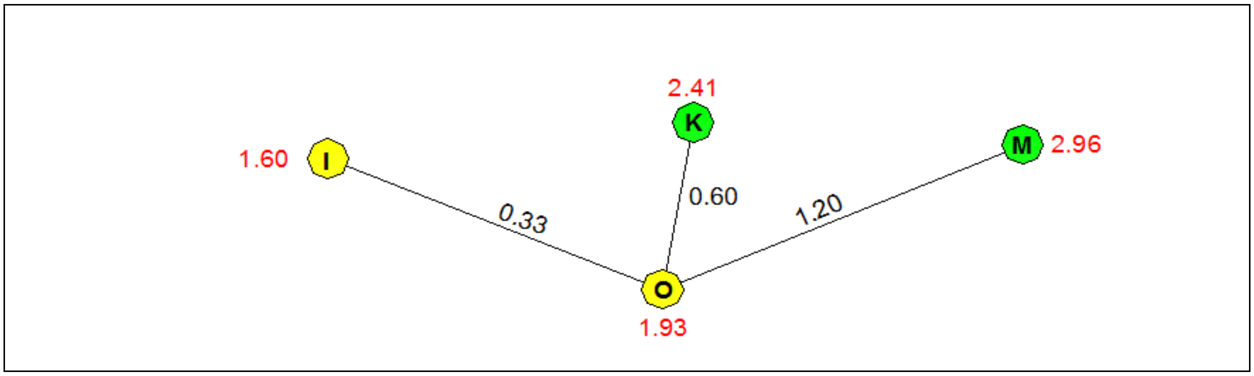
Tani mund të llogaritim rrugën minimale prej kulmit H në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$1.93-0.33=1.60\surd$$

$$1.93-0.60\neq 2.41$$

$$1.93-1.20\neq 2.93$$



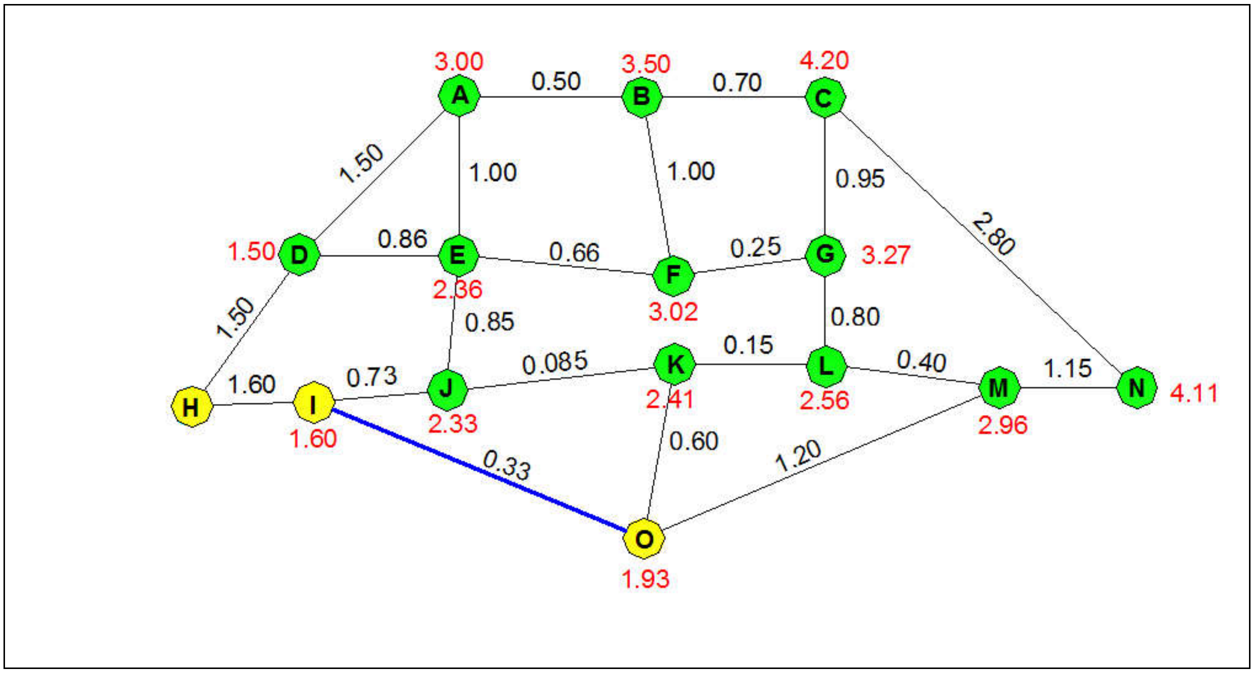
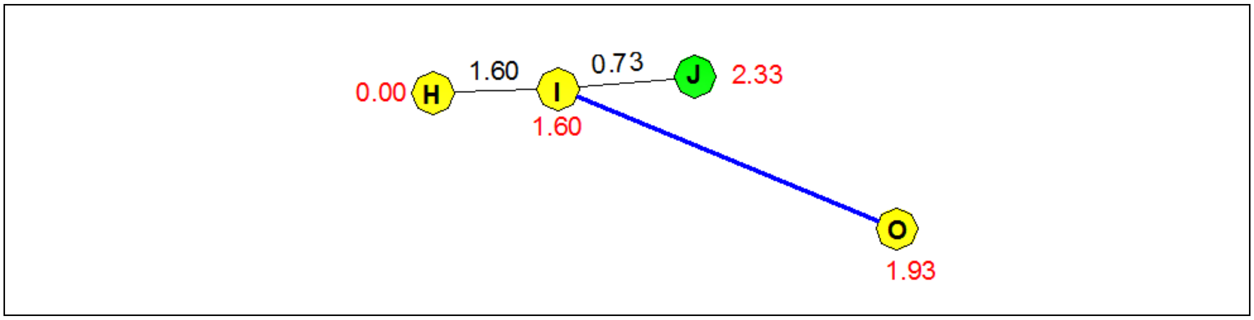




*Figura 4.3.14. Llogaritja e rrugës më të shkurtë H-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë. Tani prej kulmit I zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$1.60-1.60=0.00\surd$$

$$1.60-0.73\neq 2.33$$



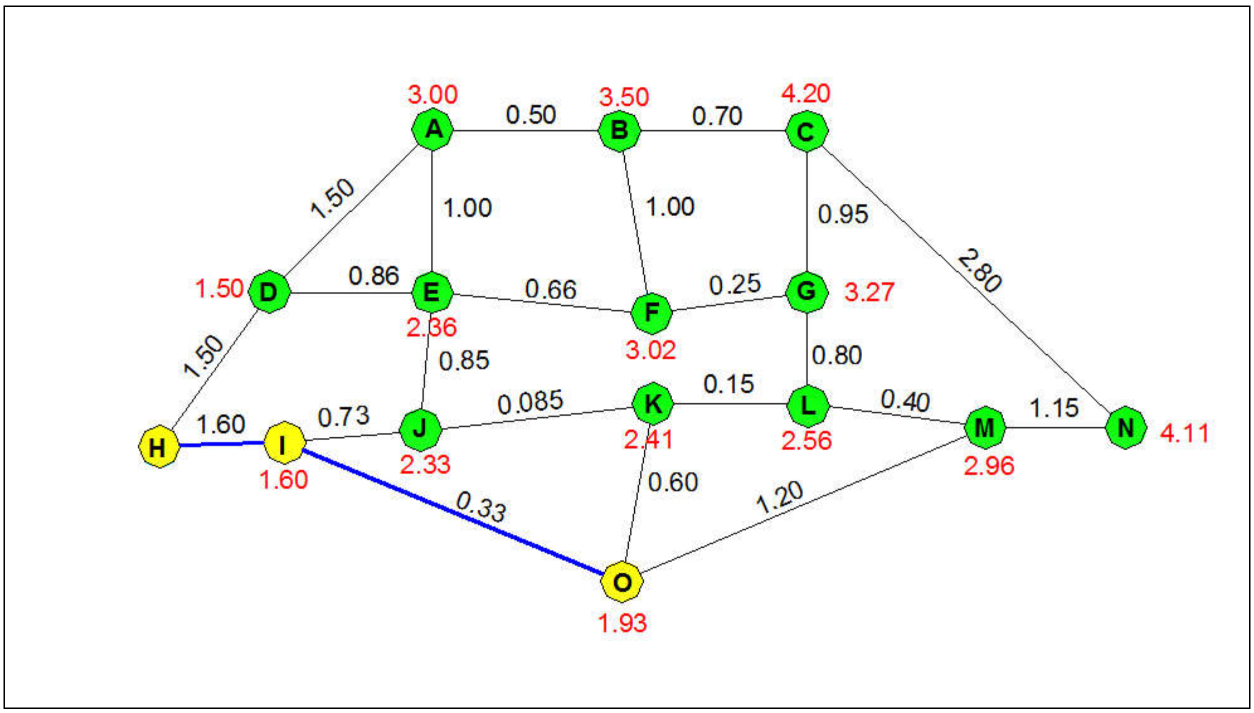




*Figura 4.3.15. Llogaritja e rrugës më të shkurtë H-O.*

Rruga me gjatësinë më të shkurtë është rruga H-I-O me gjatësi 1.93[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e shkurtë prej kulmit H-O e paraqitur në hartë.

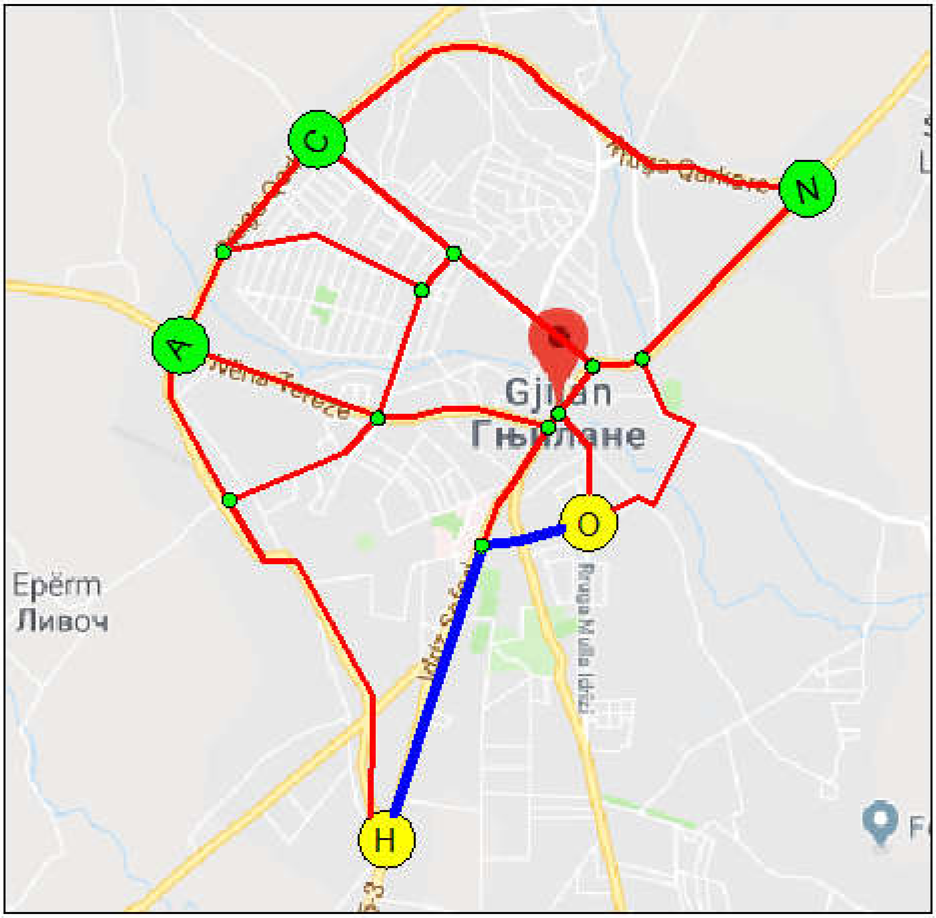



*Figura 4.3.16. Rruga më e shkurtë H-O e paraqitur në hartë.*

## 4.4. RRUGA MË E SHKURTË PREJ KULMIT N NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MINIMALE

Së pari fillojmë nga kulmi N duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga N në kulmet (C dhe M).

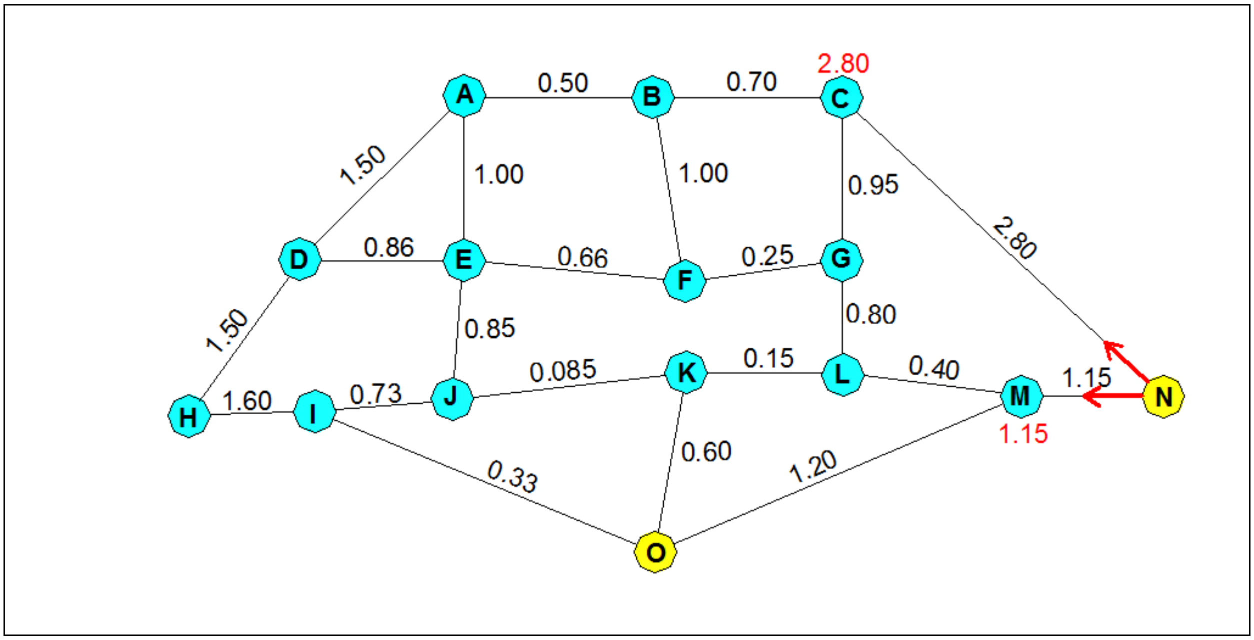



*Figura 4.4.0. Rruga më e shkurtë N-O.*

Distanca më e vogël prej kulmit N në kulmet fqinjë (C dhe M ) është 1.15.

Pastaj kulmin M me distancën 1.15 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 1.15.

Secilit kulm fqinjë (kulmit L dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

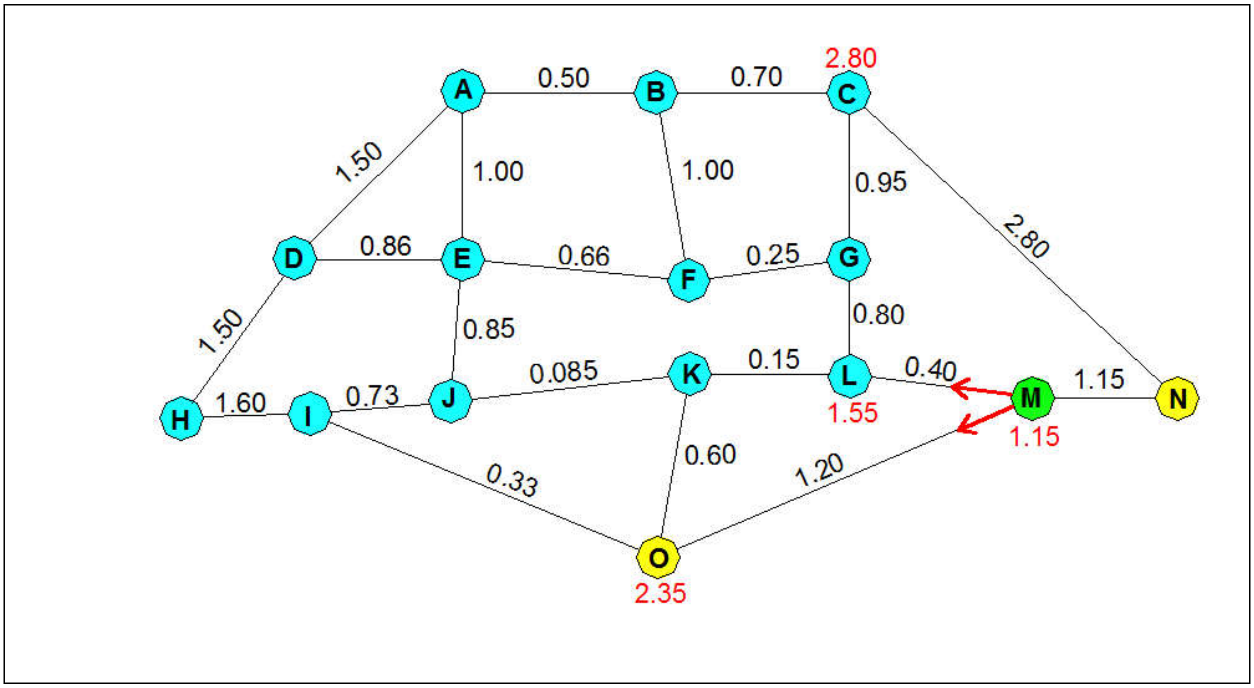



*Figura 4.4.1. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të vogël e cila është 1.55.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 1.55.

Secilit kulm fqinjë (kulmit G dhe K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

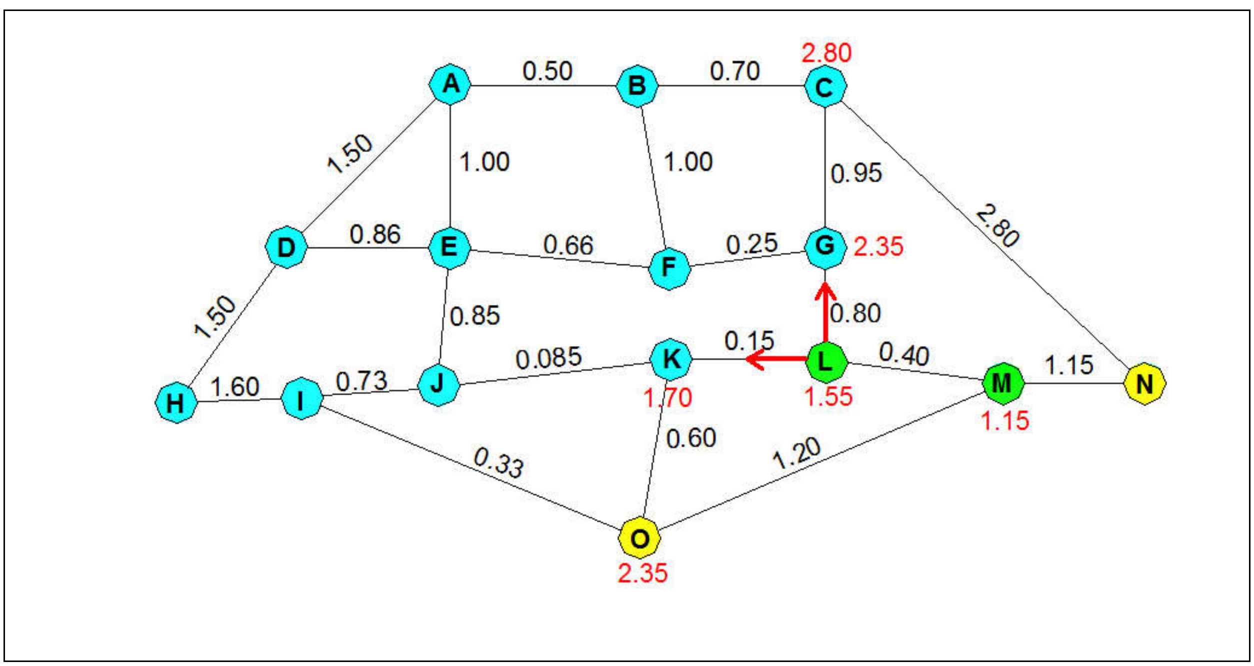



*Figura 4.4.2. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të vogël e cila është 1.70.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 1.70.

Secilit kulm fqinjë (kulmit J dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi K në kulmin O është më e shkurtë 2.30<2.35, prandaj eliminojmë distancën 2.35.

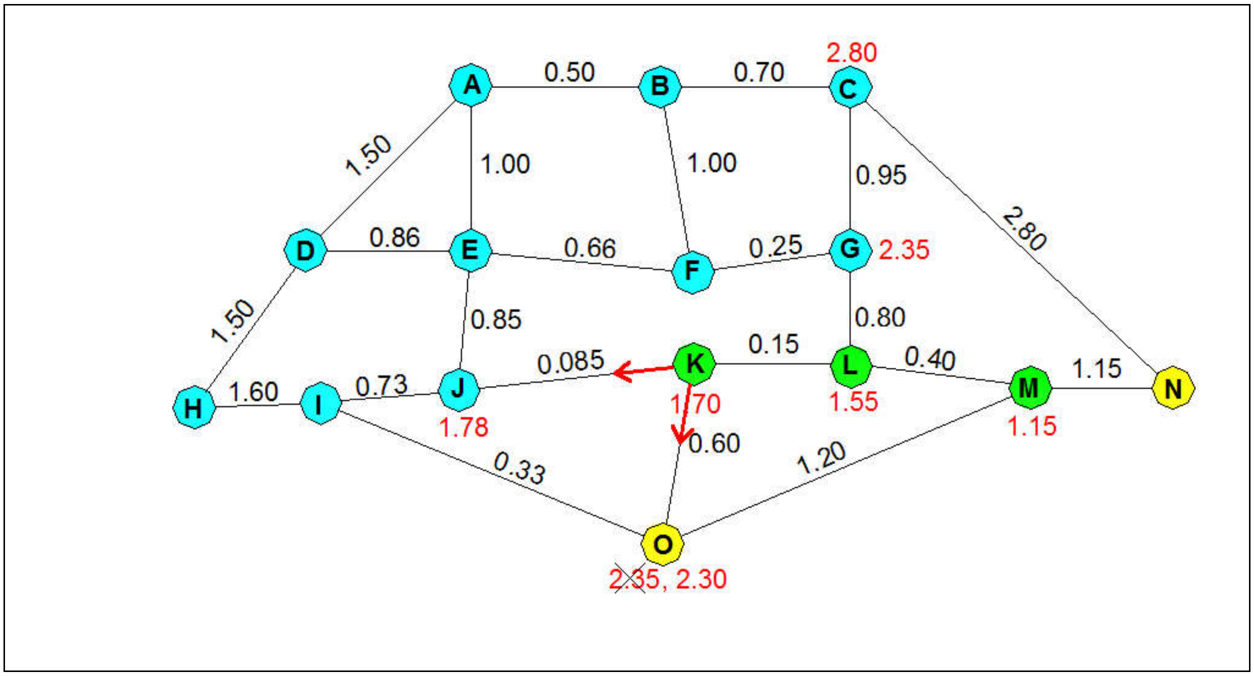



*Figura 4.4.3. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të vogël e cila është 1.78.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 1.78.

Secilit kulm fqinjë (kulmit E dhe I) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

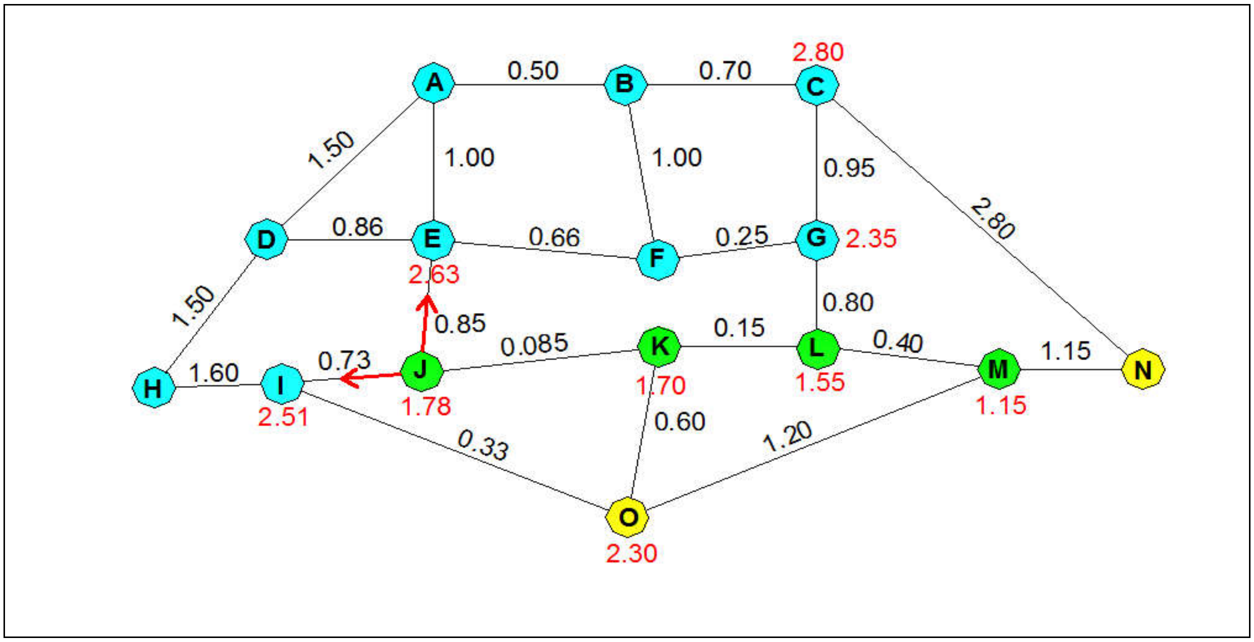



*Figura 4.4.4. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të vogël e cila është 2.35.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 2.35.

Secilit kulm fqinjë (kulmit C dhe F) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi G në kulmin C është 3.30, shohim se 3.30>2.80, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.80 dhe ajo 3.30 nuk merret parasysh.

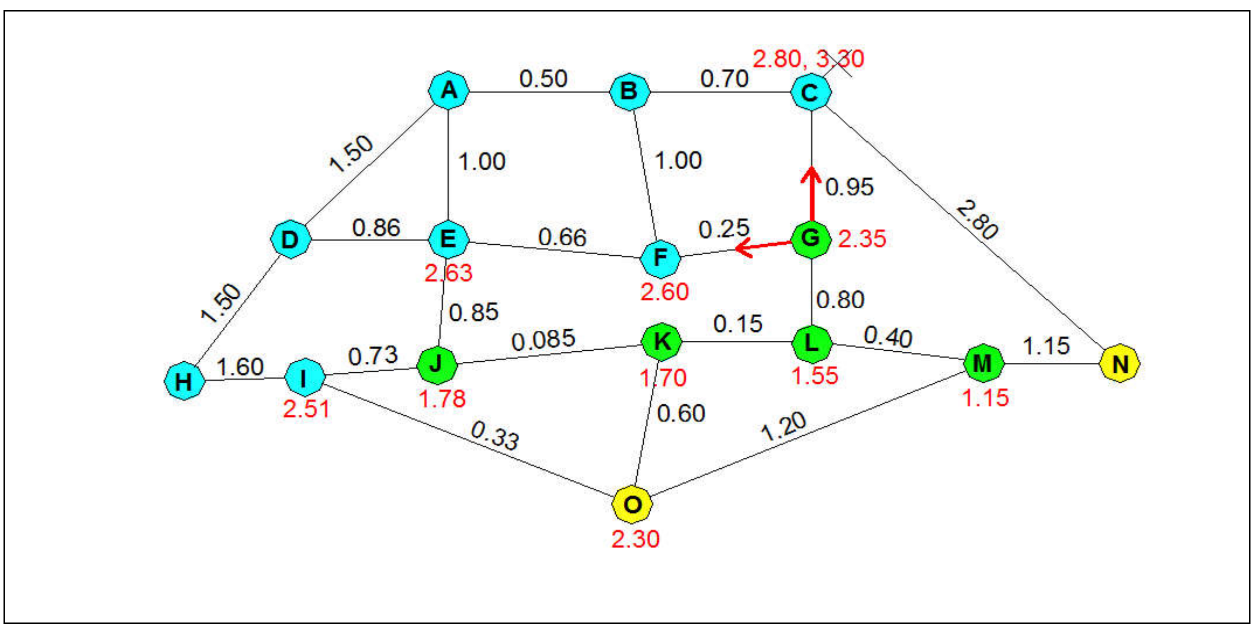



*Figura 4.4.5. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të vogël e cila është 2.51.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 2.51.

Secilit kulm fqinjë (kulmit H dhe O) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi I në kulmin O është 2.84, shohim se 2.84>2.30, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.30 dhe ajo 2.84 nuk merret parasysh.

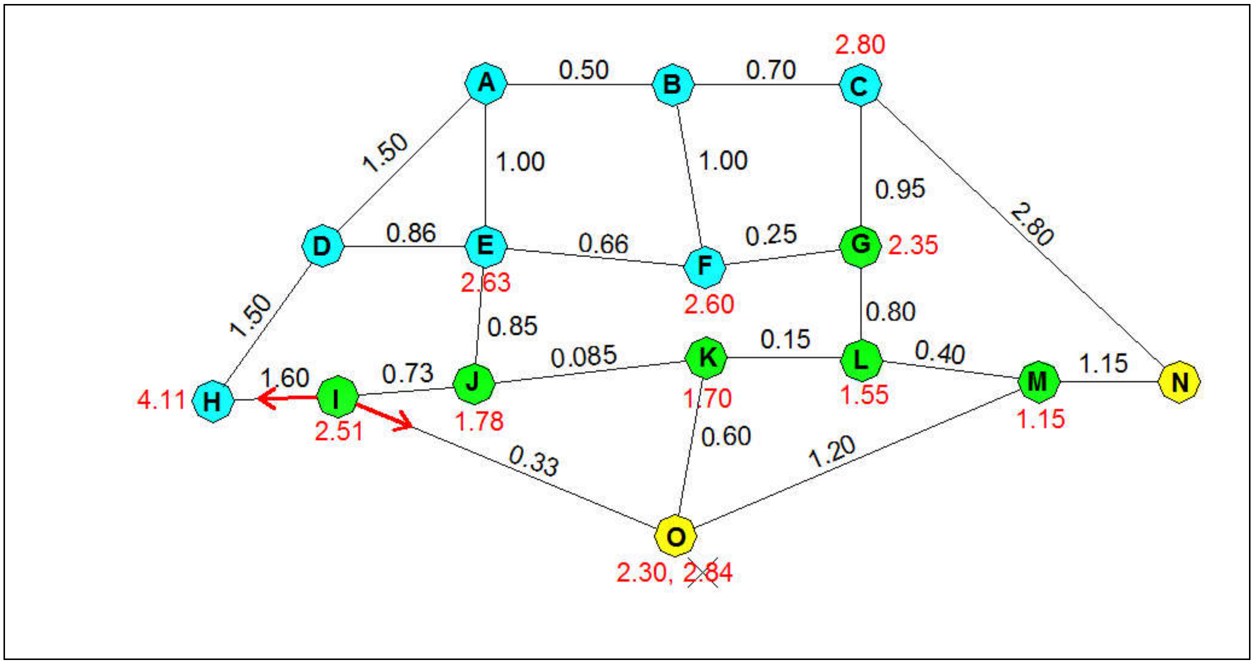



*Figura 4.4.6. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të vogël e cila është 2.60.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 2.60.

Secilit kulm fqinjë (kulmit B dhe E) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi F në kulmin E është 3.26, shohim se 3.26>2.63, prandaj mbetet distanca e mëparshme 2.63 dhe ajo 3.26 nuk merret parasysh.

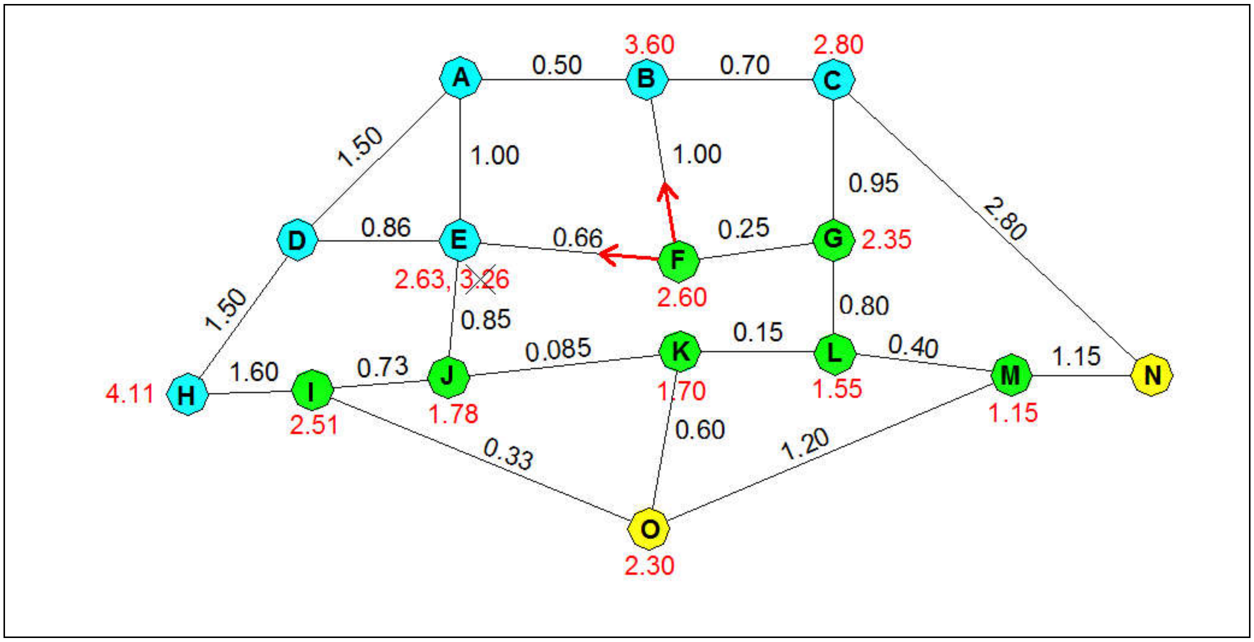



*Figura 4.4.7. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të vogël e cila është 2.63.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 2.63.

Secilit kulm fqinjë (kulmit A dhe D) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

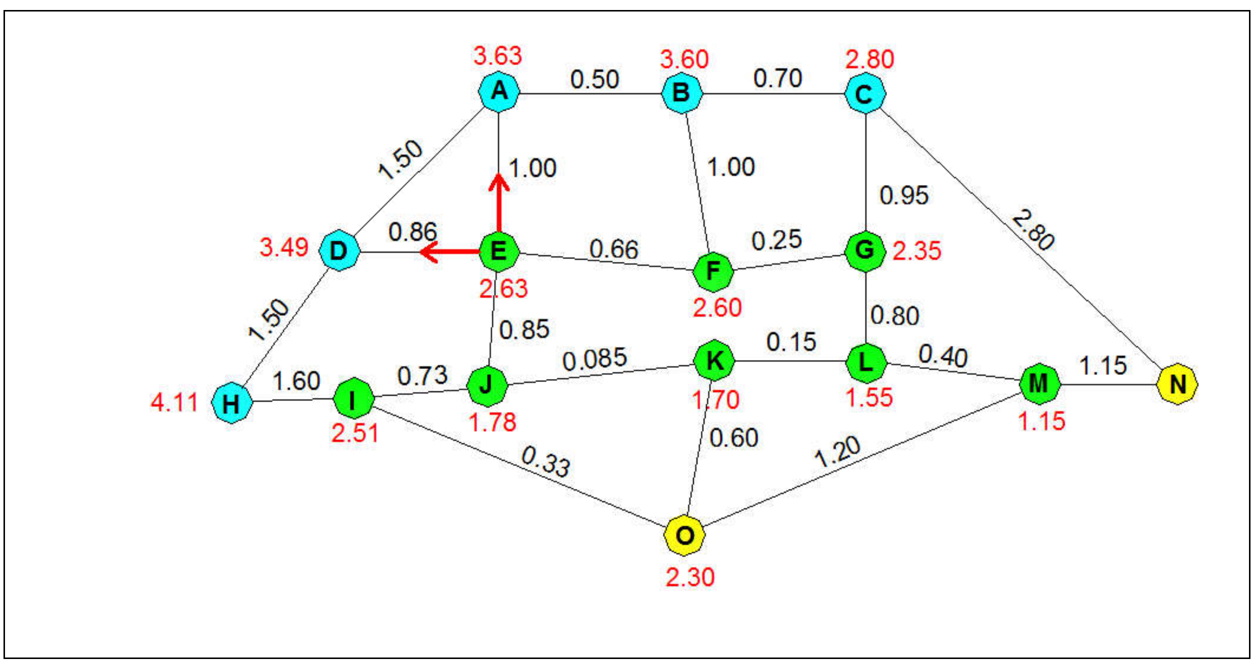



*Figura 4.4.8. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin C me distancën më të vogël e cila është 2.80.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit C me distancë 2.80.

Kulmit fqinjë (kulmit B) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi C në kulmin B është më e shkurtë 3.50<3.60, prandaj eliminojmë distancën 3.60.

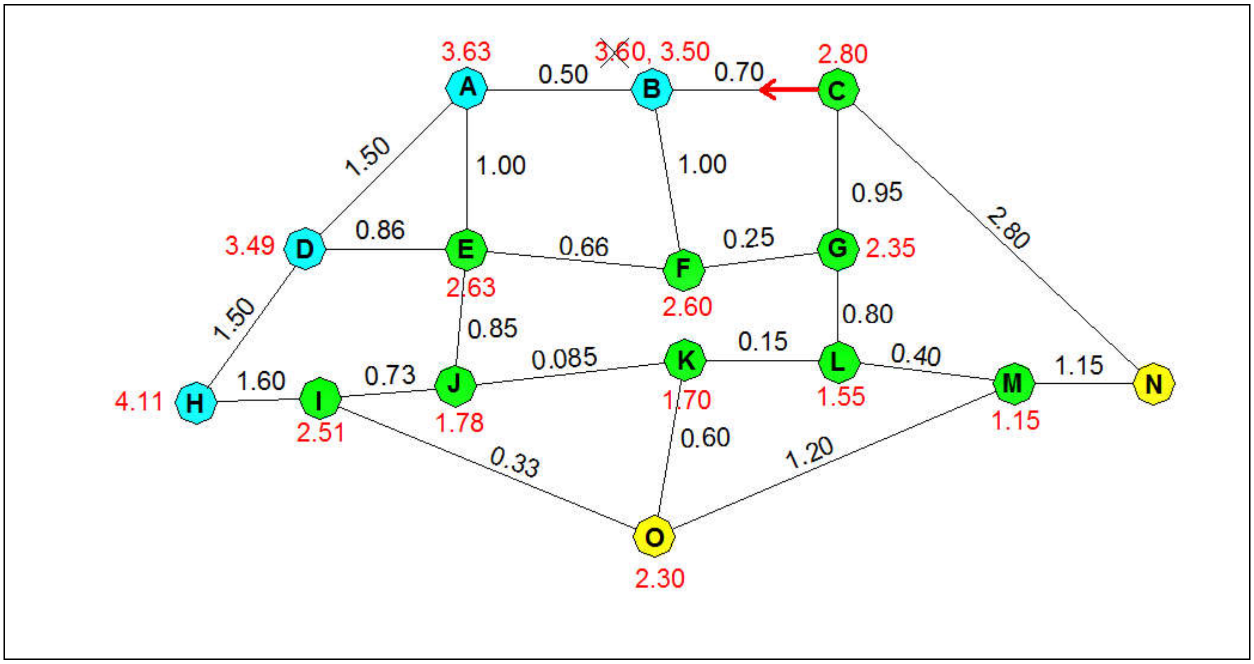



*Figura 4.4.9. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin D me distancën më të vogël e cila është 3.49.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 3.49.

Secilit kulm fqinjë (kulmit A dhe H) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi D në kulmin A është 4.99, shohim se 4.99>3.63, prandaj mbetet distanca e mëparshme 3.63 dhe ajo 4.99 nuk merret parasysh.

Gjithashtu vërejmë se distanca nga kulmi D në kulmin H është 4.99, shohim se 4.99>4.11, prandaj mbetet distanca e mëparshme 4.11 dhe ajo 4.99 nuk merret parasysh.

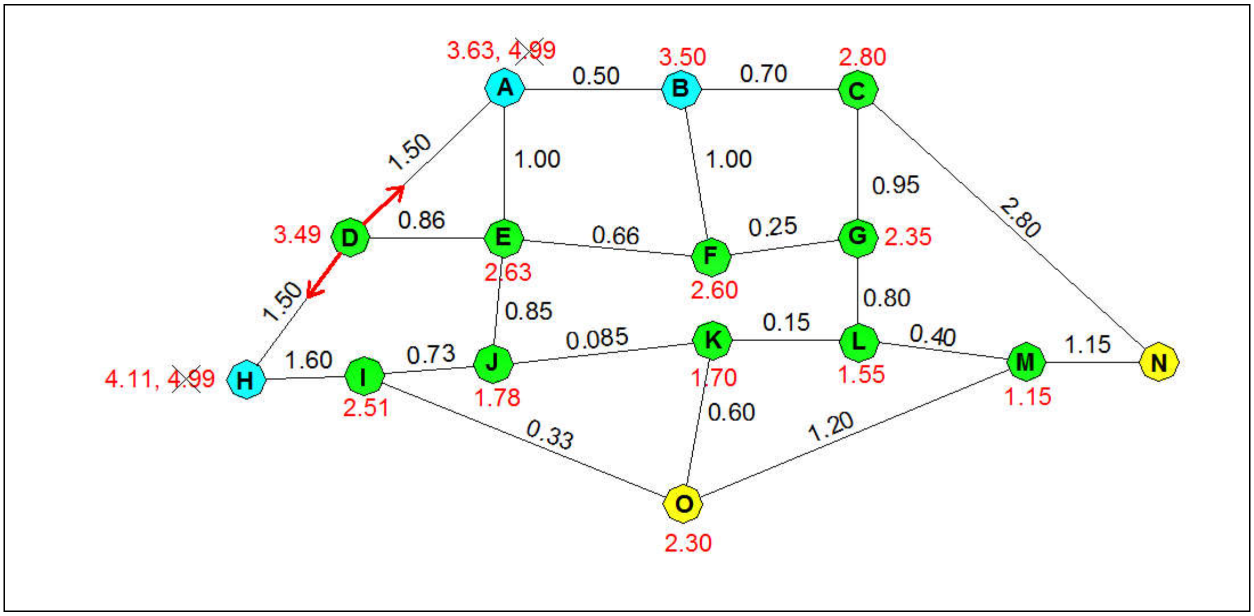



*Figura 4.4.10. Rruga më e shkurtë N-O.*

Zgjedhim distancën më të vogël nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin B me distancën më të vogël e cila është 3.50.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 3.50.

Kulmit fqinjë (kulmit A) ia shtojmë distancën e kulmit permanent.

Vërejmë se distanca nga kulmi B në kulmin A është 4.00, shohim se 4.00>3.63, prandaj mbetet distanca e mëparshme 3.63 dhe ajo 4.00 nuk merret parasysh.

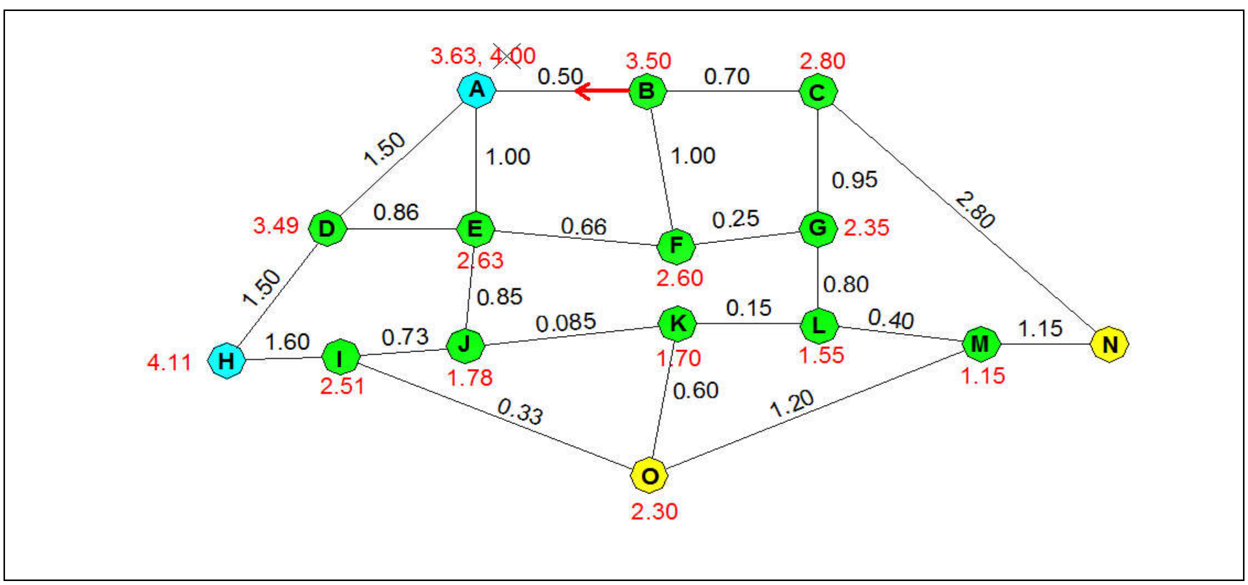



*Figura 4.4.11. Rruga më e shkurtë N-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

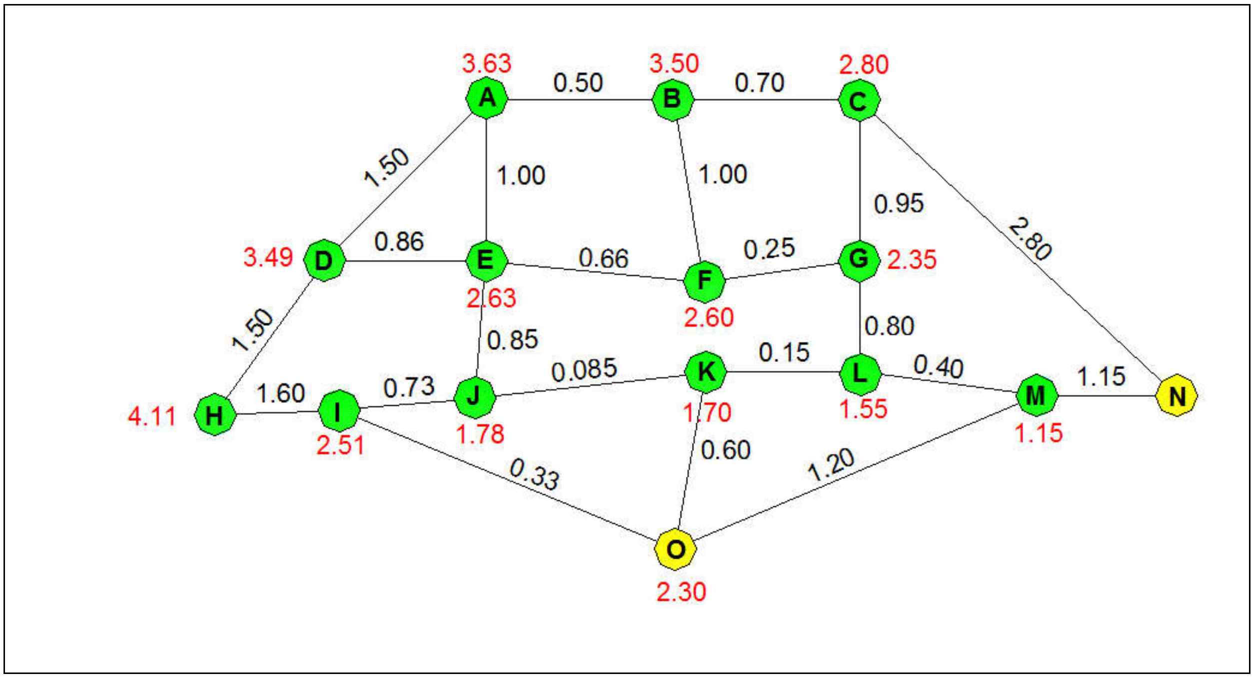



*Figura 4.4.12. Rruga më e shkurtë N-O.*

**Llogaritja e rrugës minimale N-O.**

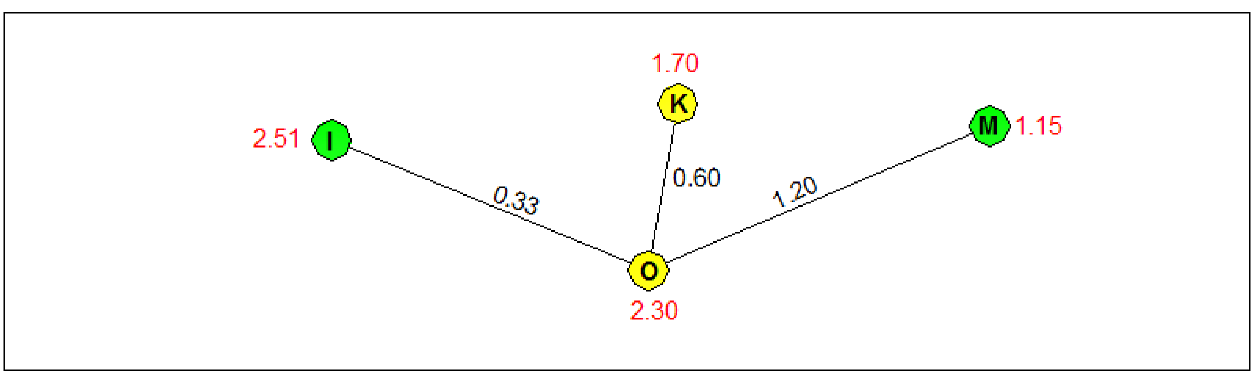
Tani mund të llogaritim rrugën minimale prej kulmit N në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$2.30-0.33\neq 2.51$$

$$2.30-0.30=1.70\surd$$

$$2.30-1.20\neq 1.15$$



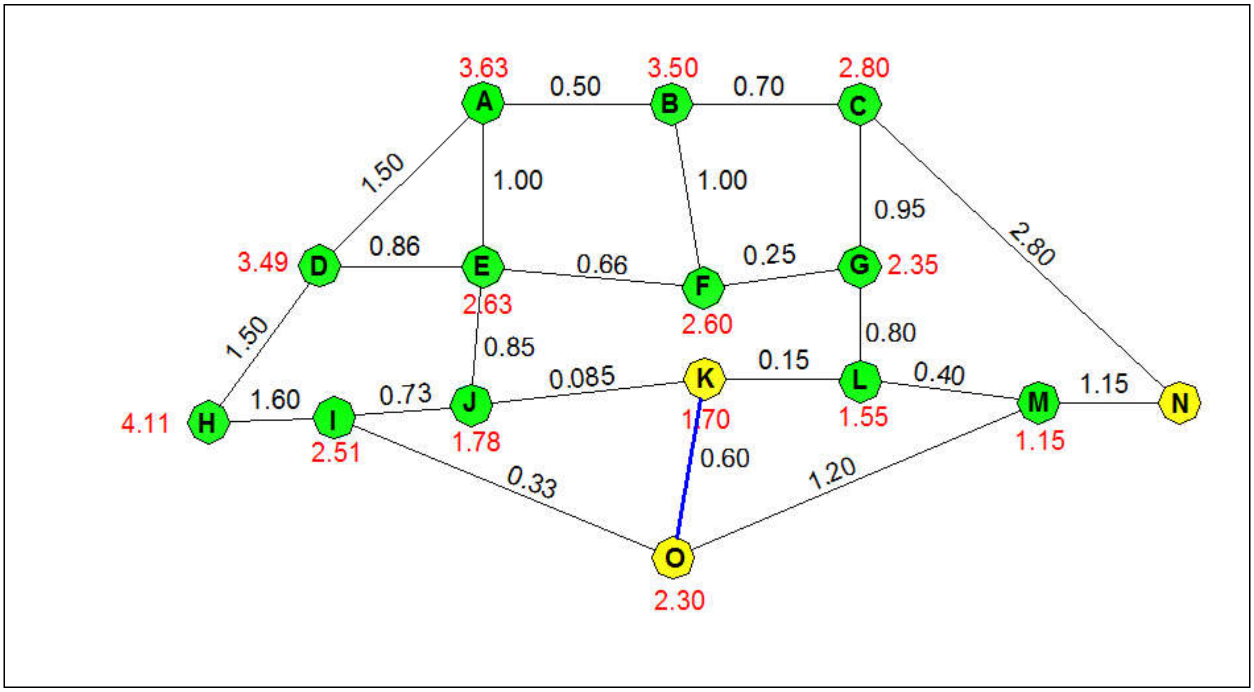
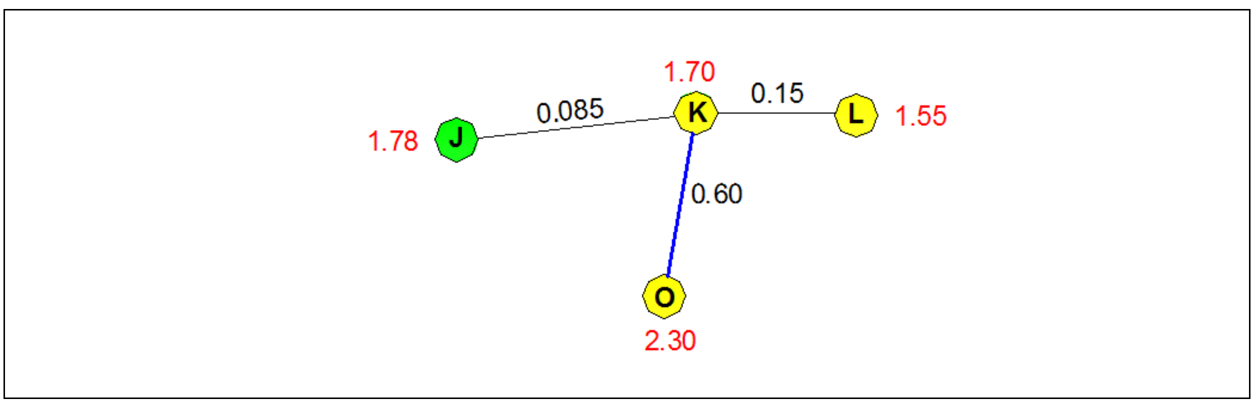



*Figura 4.4.13. Llogaritja e rrugës më të shkurtë N-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë. Tani prej kulmit K zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$1.70-0.085=1.78\surd$$

$$1.70-0.15\neq1.55$$



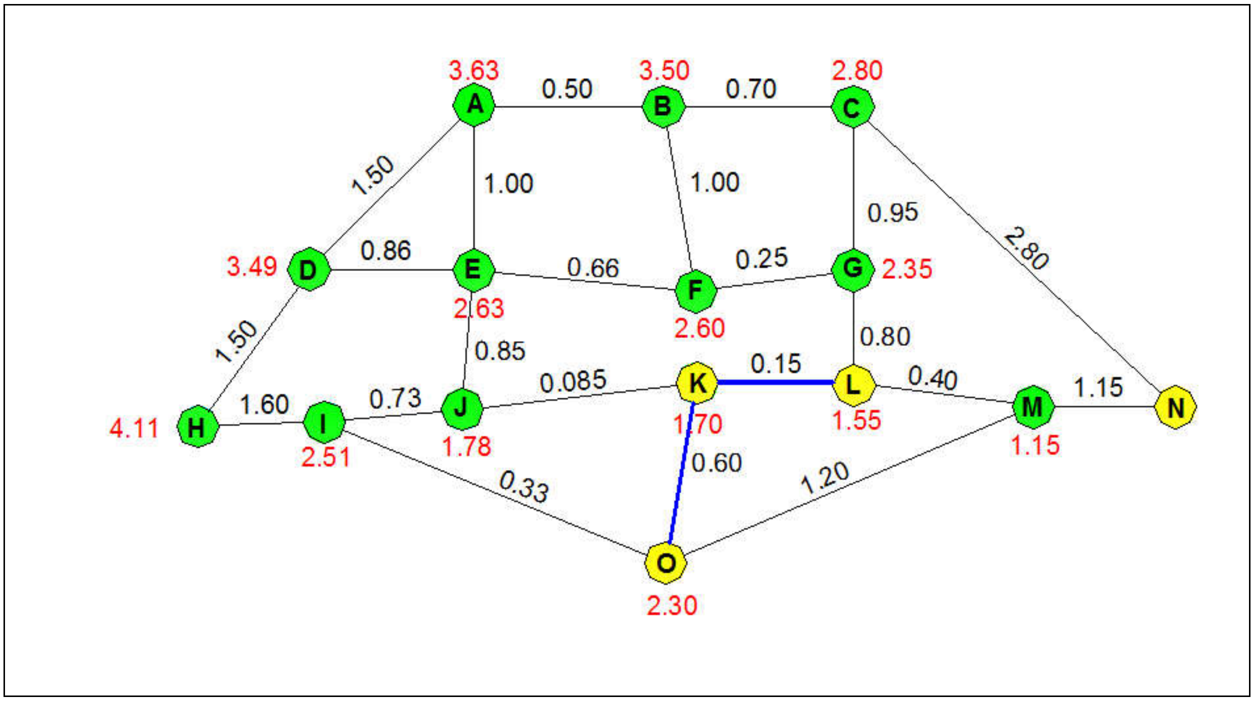
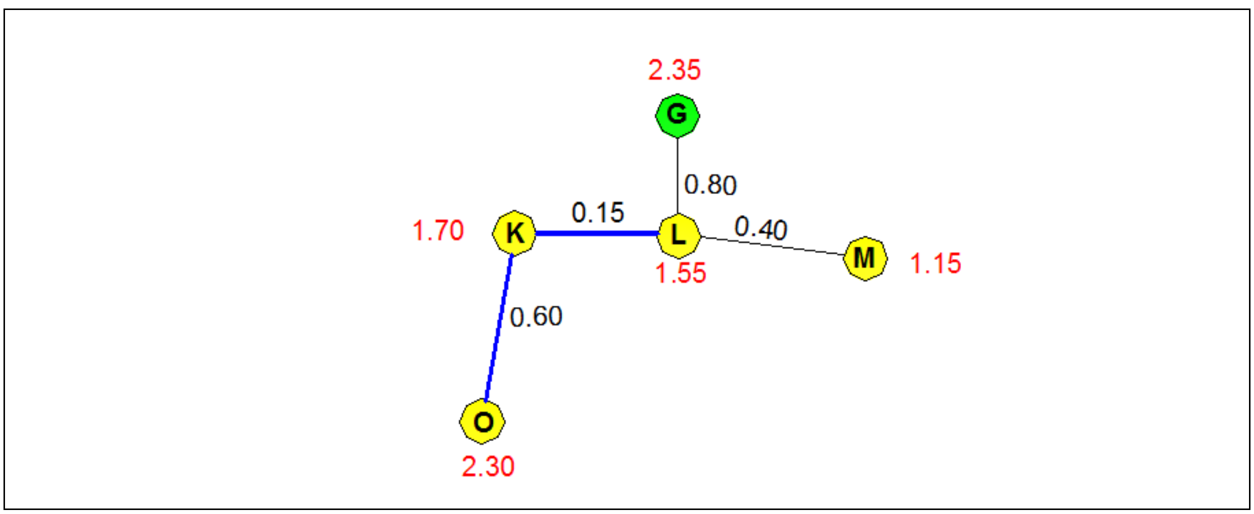



*Figura 4.4.14. Llogaritja e rrugës më të shkurtë N-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$1.55-0.80 \neq 2.35$$

$$1.55-0.40-1.15\surd$$



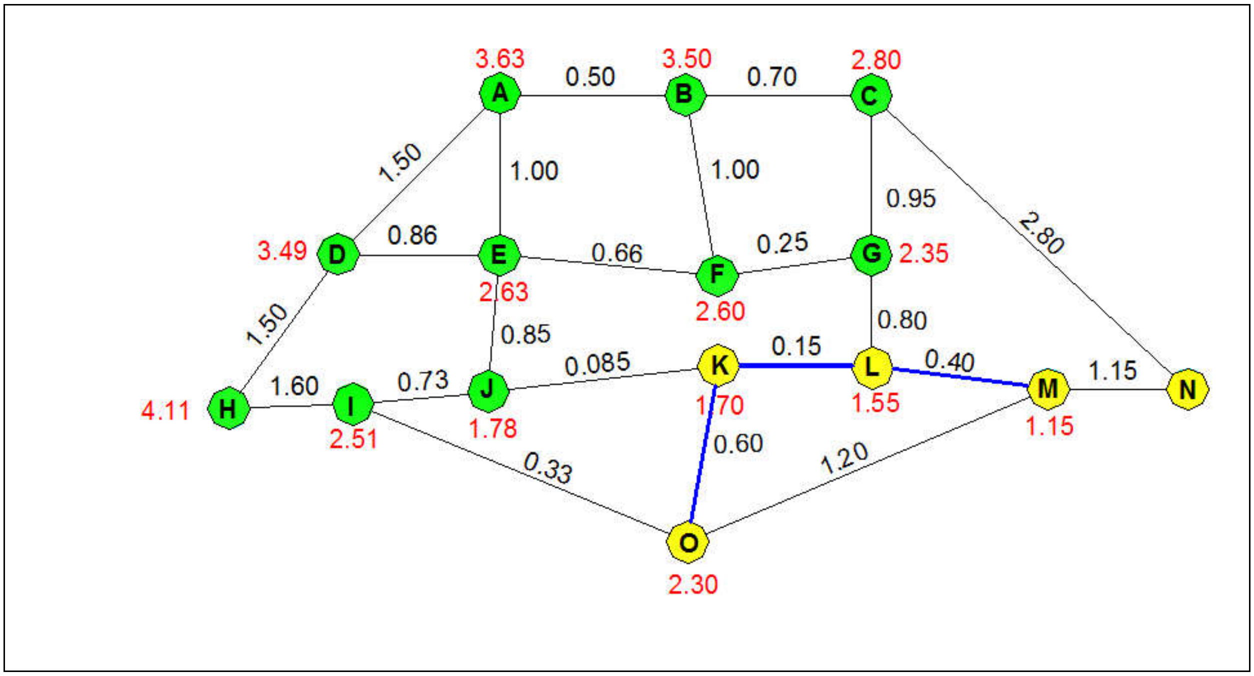
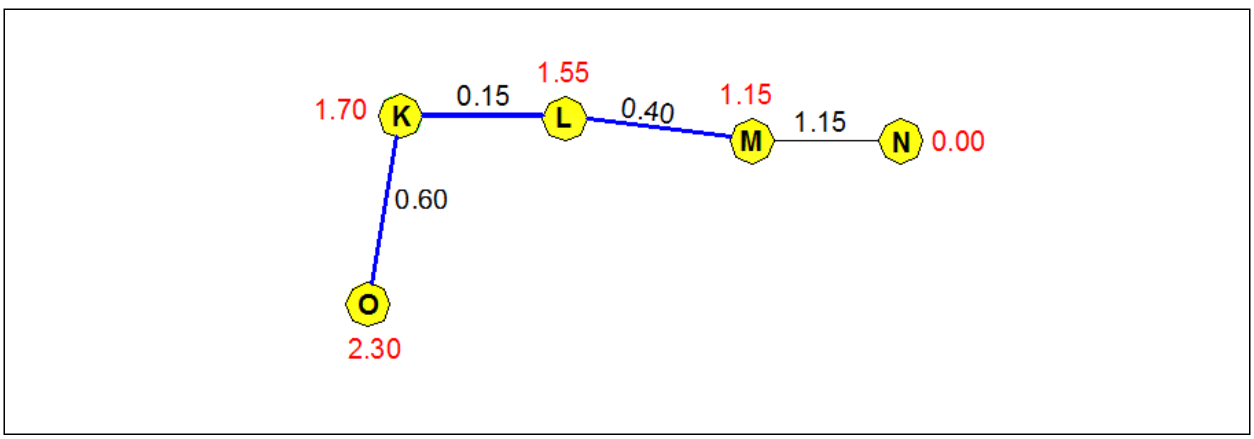



*Figura 4.4.15. Llogaritja e rrugës më të shkurtë N-O.*

Pastaj prej kulmit M zbresim distancën e kulmit fqinje.

1.15-1.15=0.00√



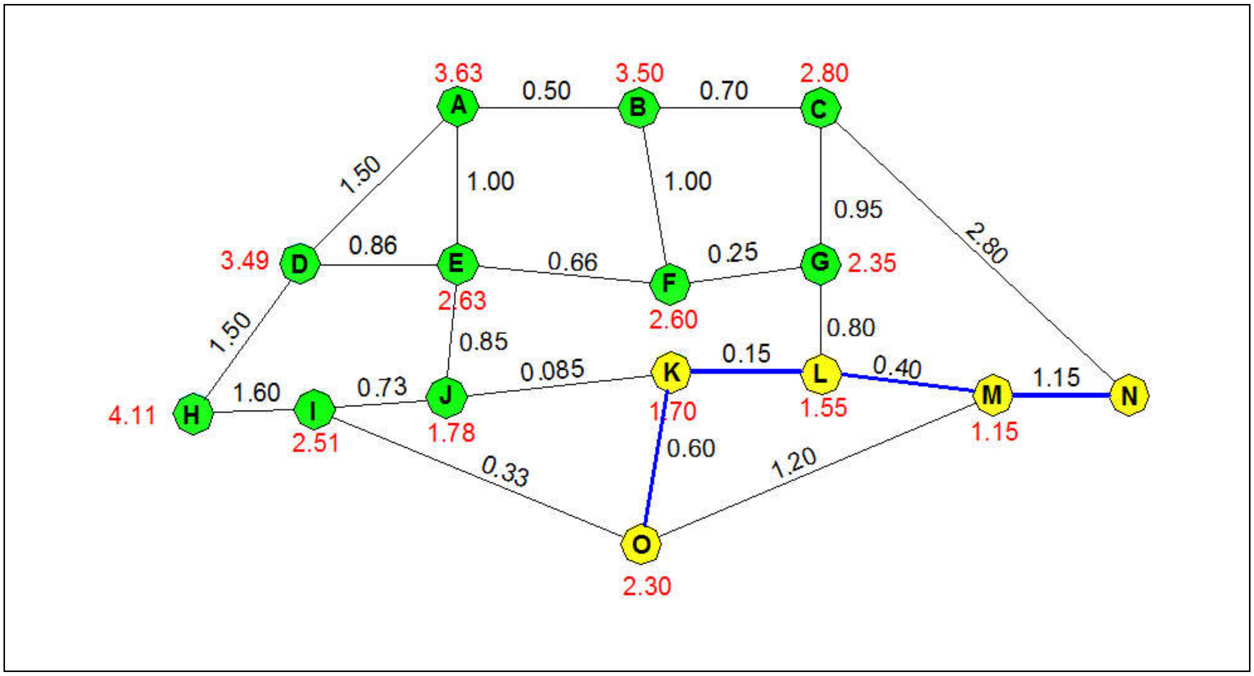



*Figura 4.4.16. Llogaritja e rrugës më të shkurtë N-O.*

Rruga me gjatësinë më të shkurtë është rruga N-M-L-K-O me gjatësi 2.30[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e shkurtë prej kulmit N-O e paraqitur në hartë.

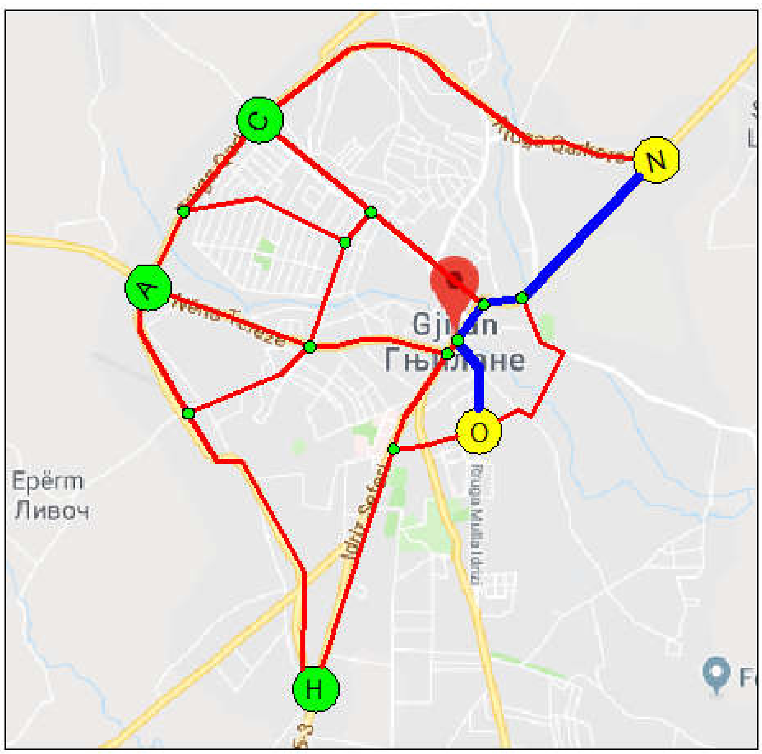



*Figura 4.4.17. Rruga më e shkurtë N-O e paraqitur në hartë.*

## 4.5. RRUGA MË E GJATË PREJ KULMIT A NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MAKSIMALE

Rrugët nga A deri në O në grafin e dhënë janë të shumta pa përdorimin e këtij algoritmi, por që të vihet deri te ajo më e gjata duhet të përdoret Algoritmi Dijsktra.

Procedura eshtë e njëjtë sikurse për gjetjen e rrugëve të shkurtra vetëm se këtu zgjedhet distanca më e gjatë.

Së pari fillojmë nga kulmi A duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi A në kulmet (B dhe D dhe E).

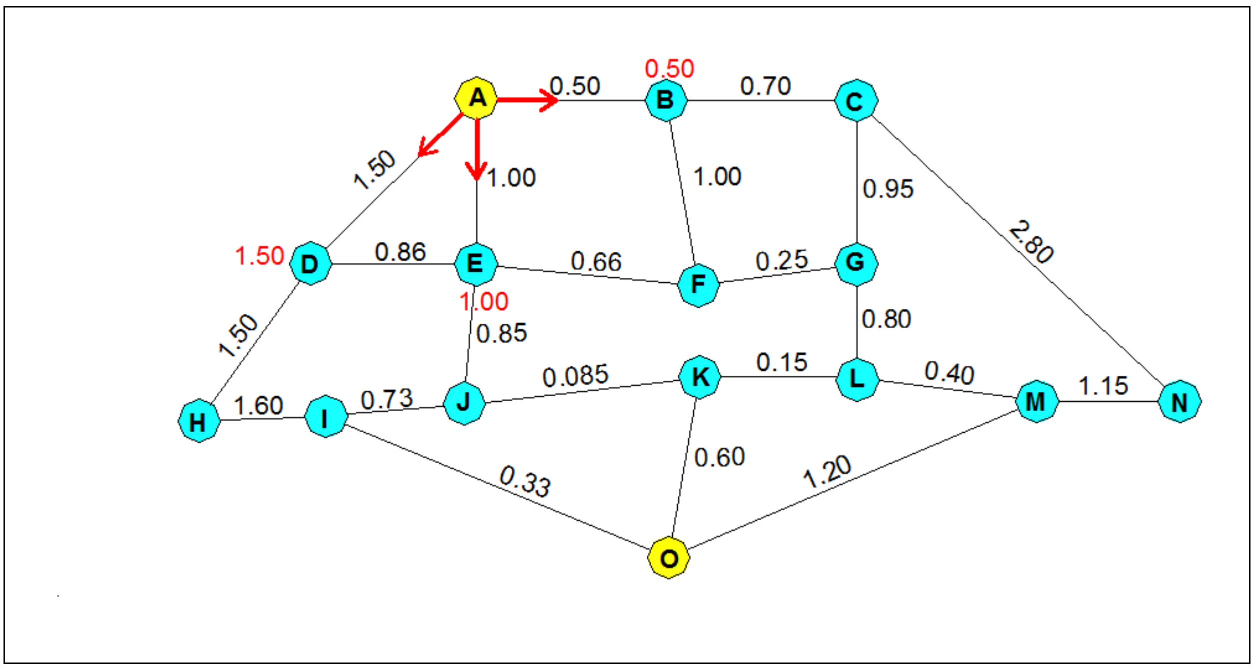



*Figura 4.5.0. Rruga më e gjatë A-O.*

Distanca më e gjatë prej kulmit A në kulmet fqinjë (B, D dhe E) është 1.50.

Pastaj kulmin D me distancën 1.50 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 1.50.

Secilit kulm fqinjë (kulmit E dhe H) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi D në kulmin E është më e gjatë, 2.36>1.00, atëherë e eleminojmë distancën 1.00.

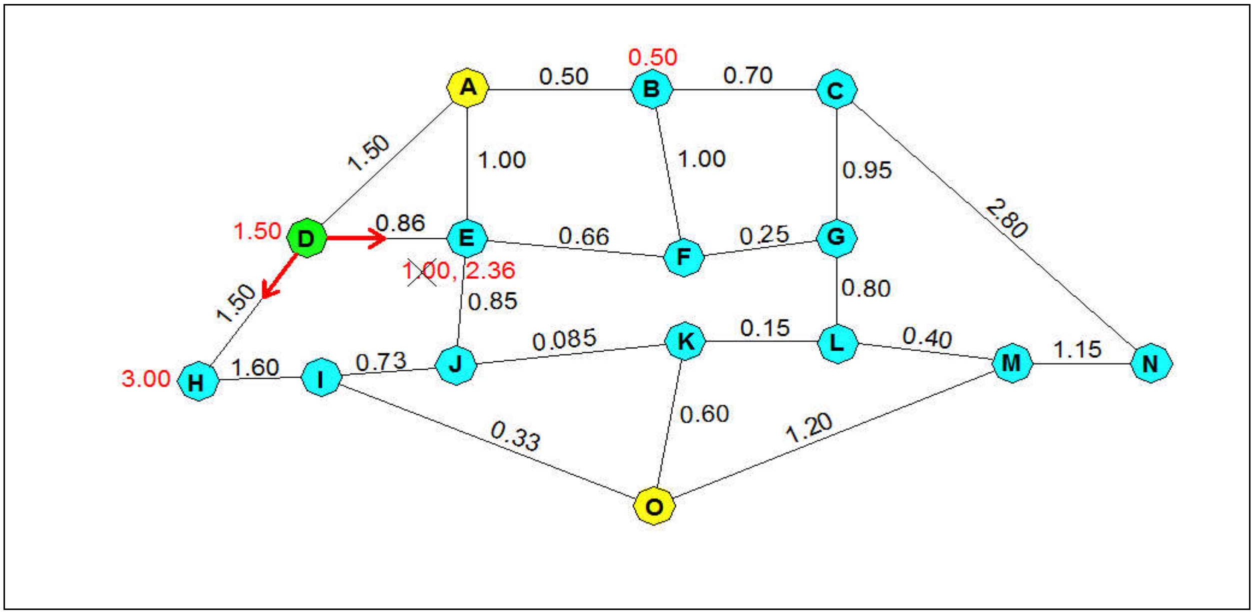



*Figura 4.5.1. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin H me distancën më të gjatë e cila është 3.0.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit H me distancë 3.00.

Kulmit fqinjë (kulmit I) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

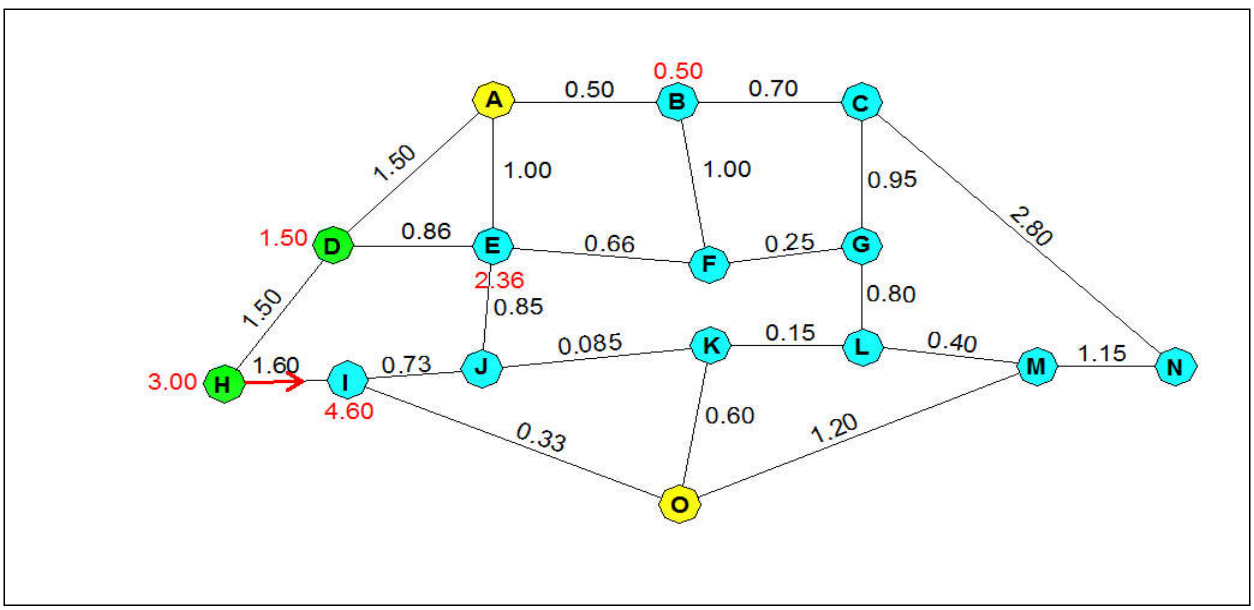



*Figura 4.5.2. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të gjatë e cila është 4.60.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 4.60.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit J dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

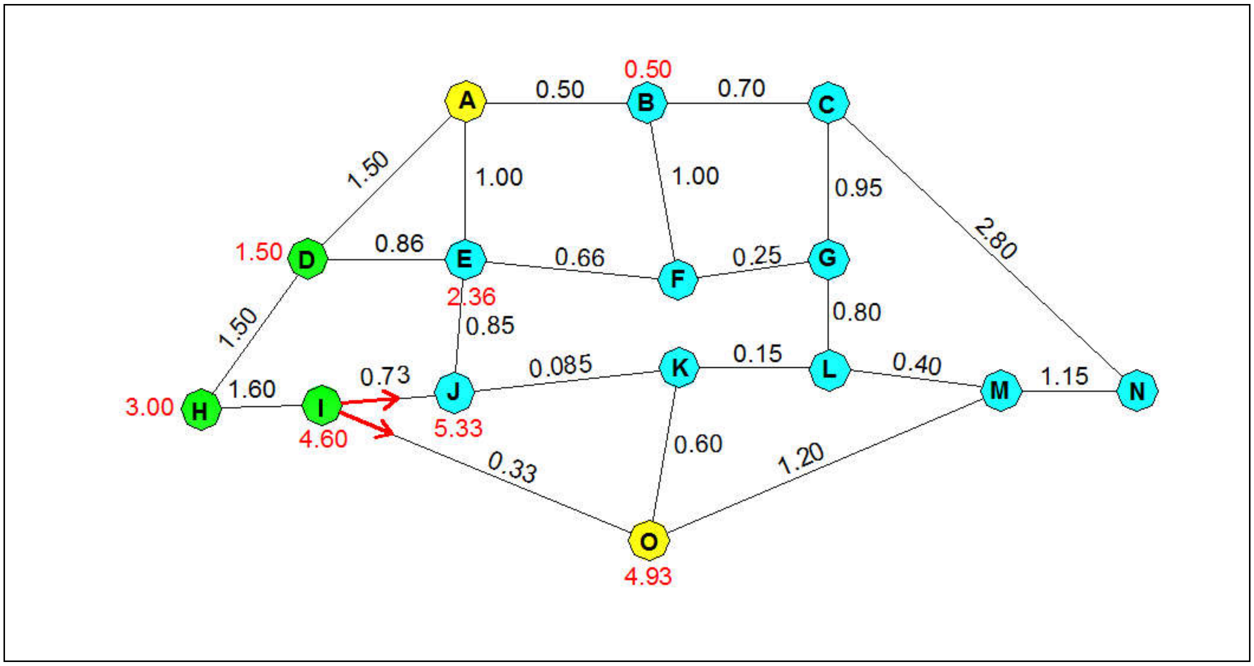



*Figura 4.5.3. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të gjatë e cila është 5.33.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 5.33.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit E dhe K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi J në kulmin E është më e gjatë, 6.18>2.36, atëherë e eleminojmë distancën 2.36.

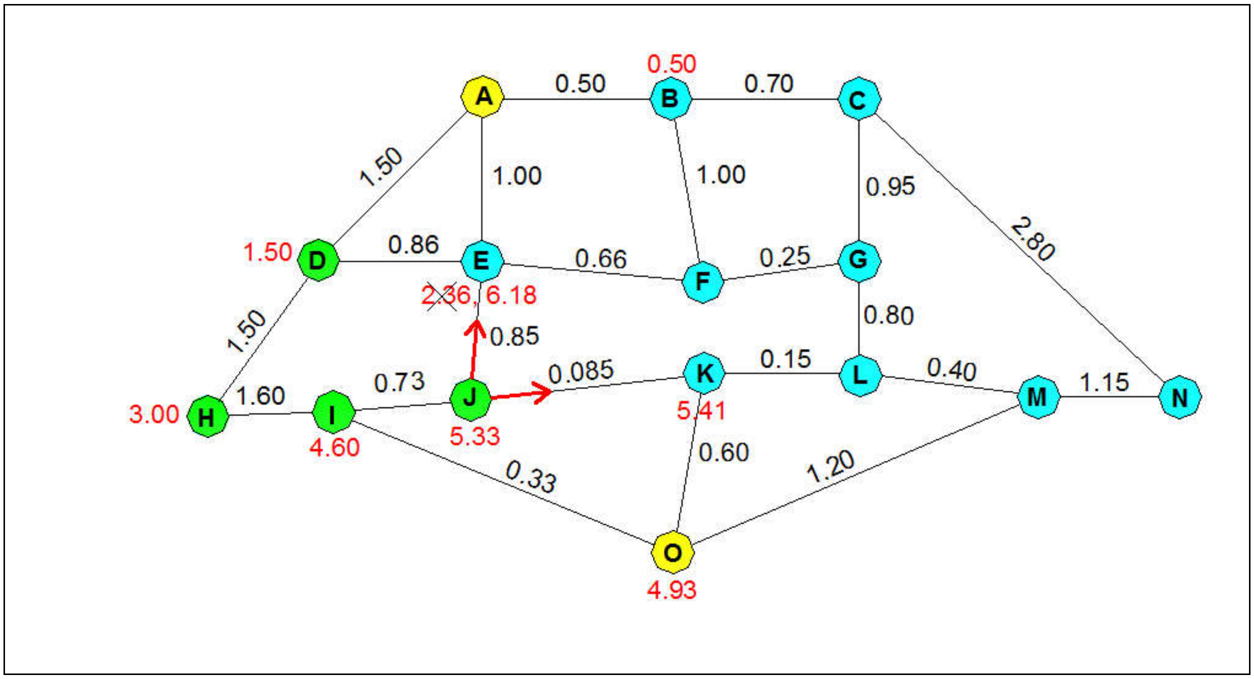



*Figura 4.5.4. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të gjatë e cila është 6.18.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 6.18.

Kulmit fqinjë ( kulmit F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

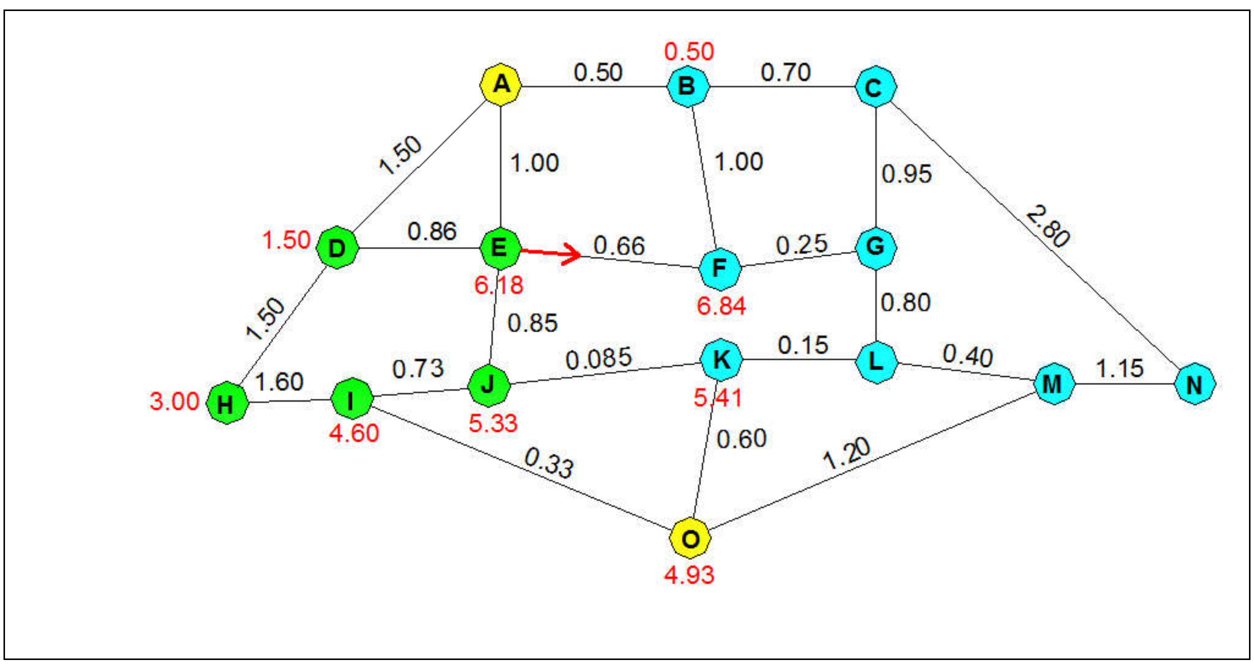



*Figura 4.5.5. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të gjatë e cila është 6.84.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 6.84.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit B dhe G) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi F në kulmin B është më e gjatë, 7.84>0.50, atëherë e eleminojmë distancën 0.50.

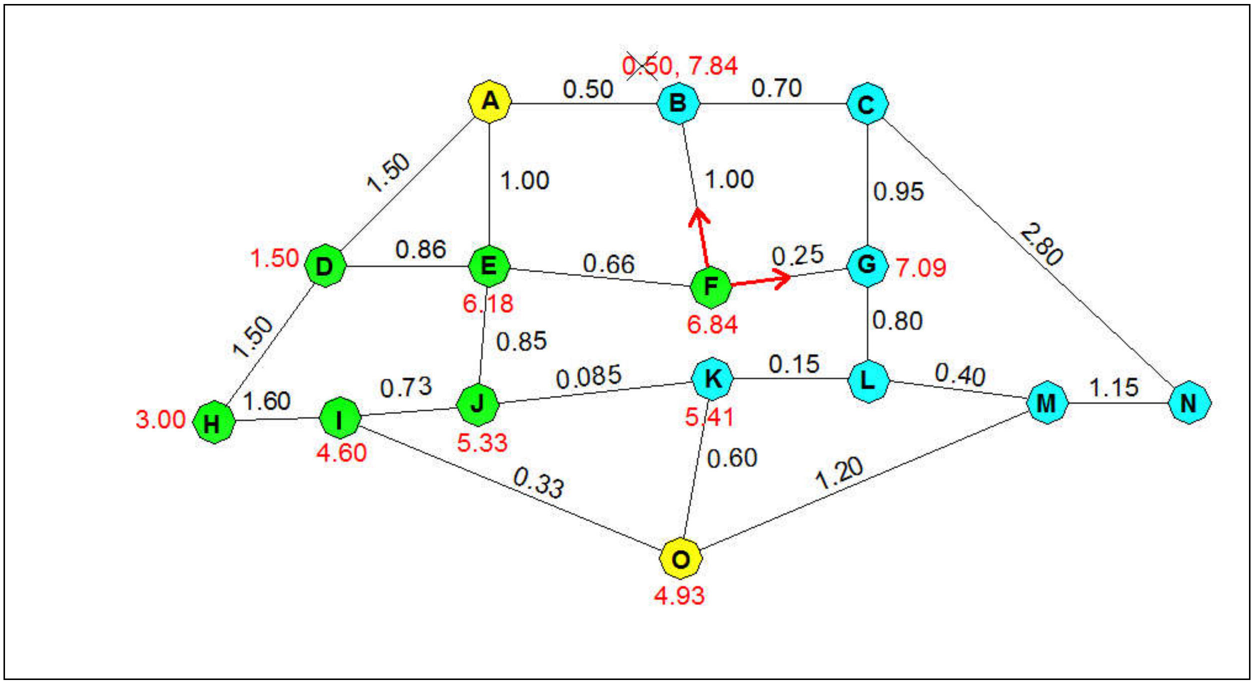



*Figura 4.5.6. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin B me distancën më të gjatë e cila është 7.84.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 7.84.

Kulm fqinjë ( kulmit C) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

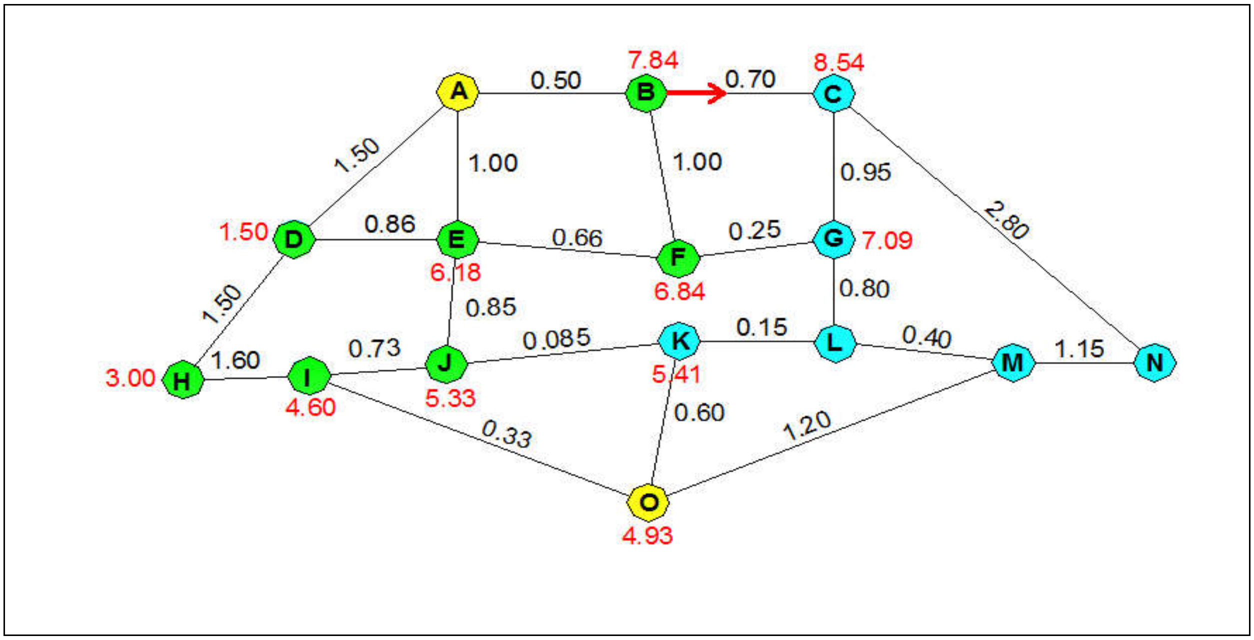



*Figura 4.5.7. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin C me distancën më të gjatë e cila është 8.54.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit C me distancë 8.54.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit G dhe N) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi C në kulmin G është më e gjatë, 9.49>7.09, atëherë e eleminojmë distancën 7.09.

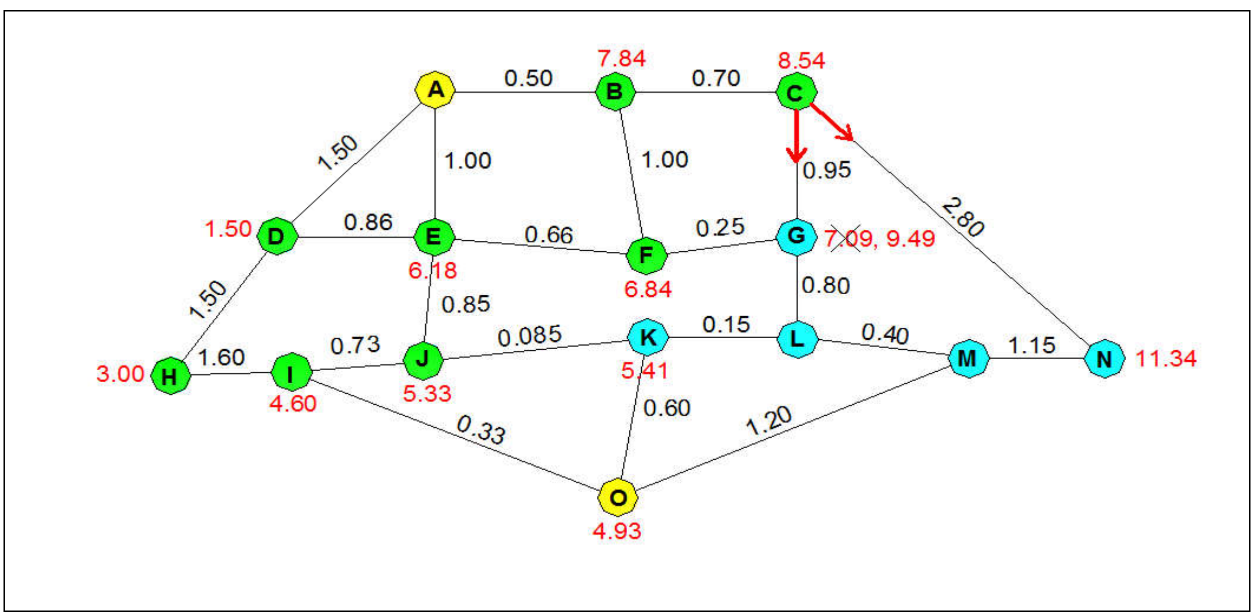



*Figura 4.5.8. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin N me distancën më të gjatë e cila është 11.34.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit N me distancë 11.34.

Kulmit fqinjë ( kulmit M) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

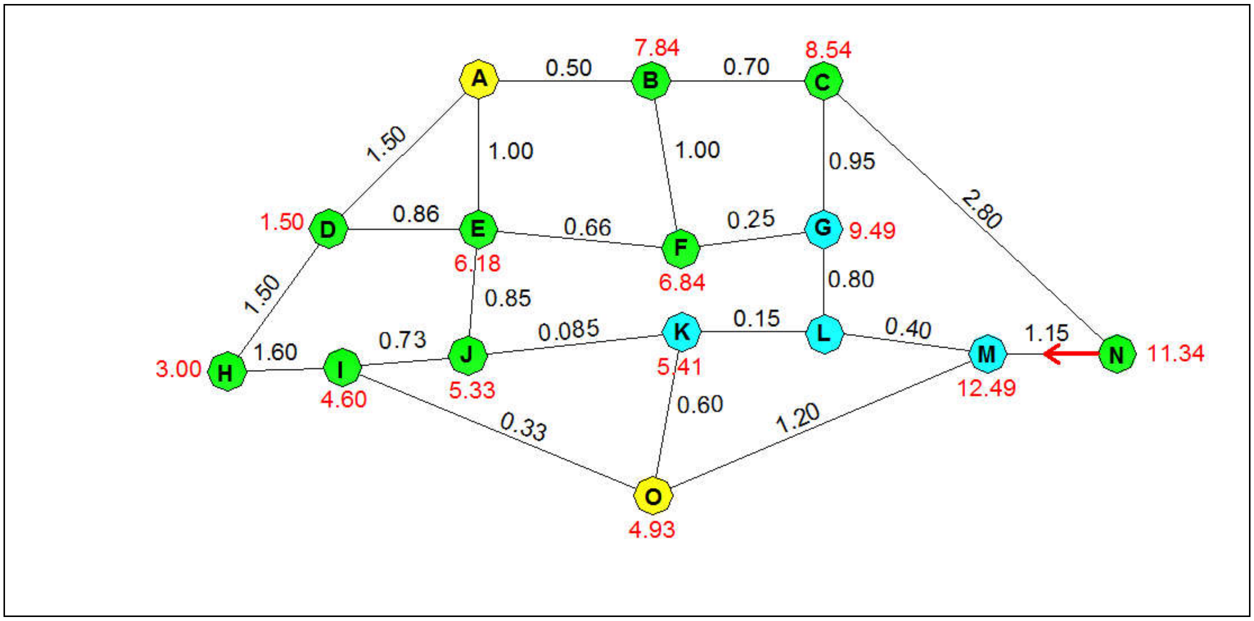



*Figura 4.5.9. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të gjatë e cila është 12.34.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 12.34.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit L dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi M në kulmin O është më e gjatë, 13.69>4.93, atëherë e eleminojmë distancën 4.93.

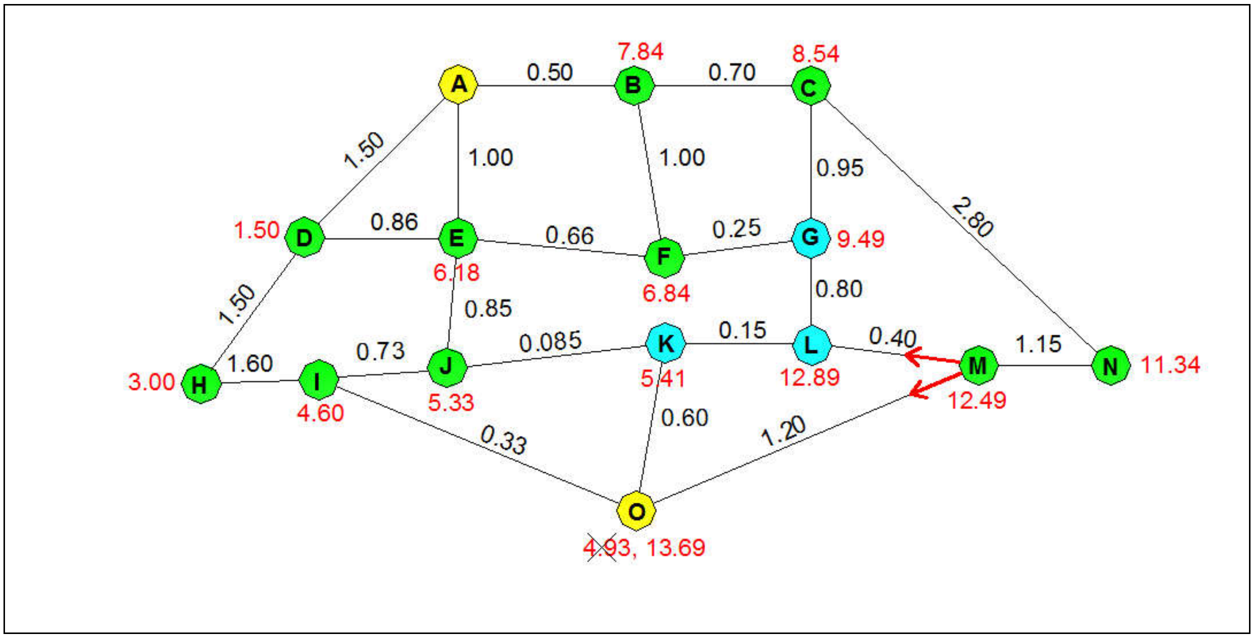



*Figura 4.5.10. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të gjatë e cila është 12.89.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 12.89.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit G dhe K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi L në kulmin G është më e gjatë, 13.69>9.49, atëherë e eleminojmë distancën 9.49.

Gjithashtu edhe distanca nga kulmi L në kulmin K është më e gjatë, 13.04>5.41, atëherë e eleminojmë distancën 5.41.

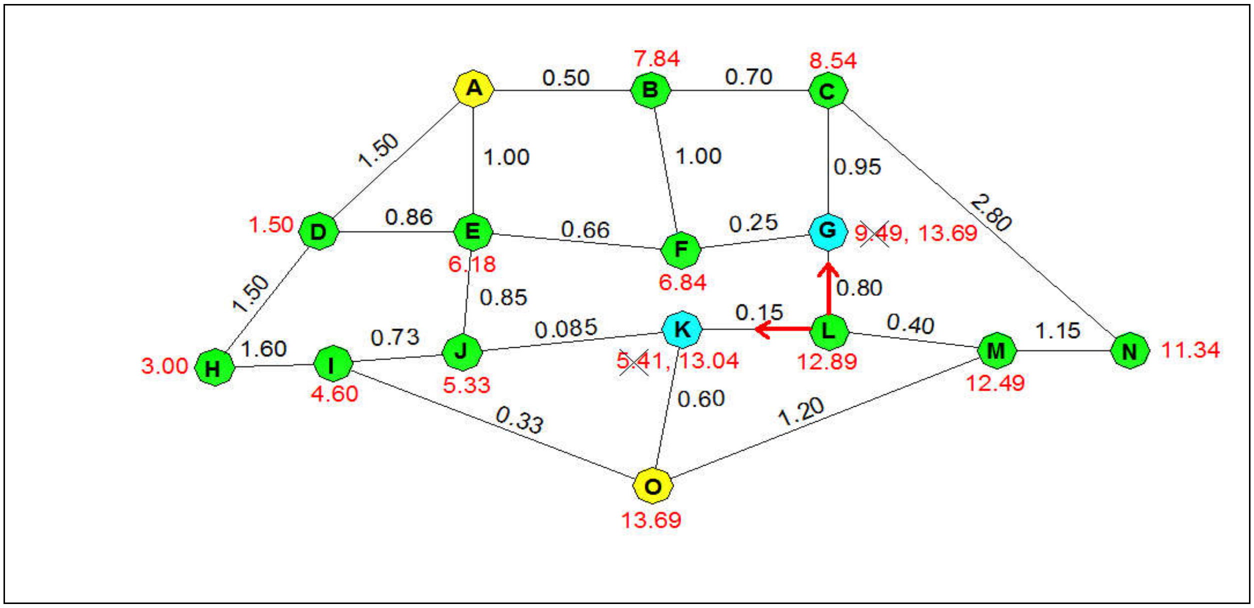



*Figura 4.5.11. Rruga më e gjatë A-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi A.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të gjatë e cila është 13.04.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 13.04.

Kulmit fqinjë ( kulmit O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi K në kulmin O është më e shkurtë, 13.64<13.69, prandaj mbetet distanca e mëparshme 13.69 dhe ajo 13.64 nuk merret parasysh.

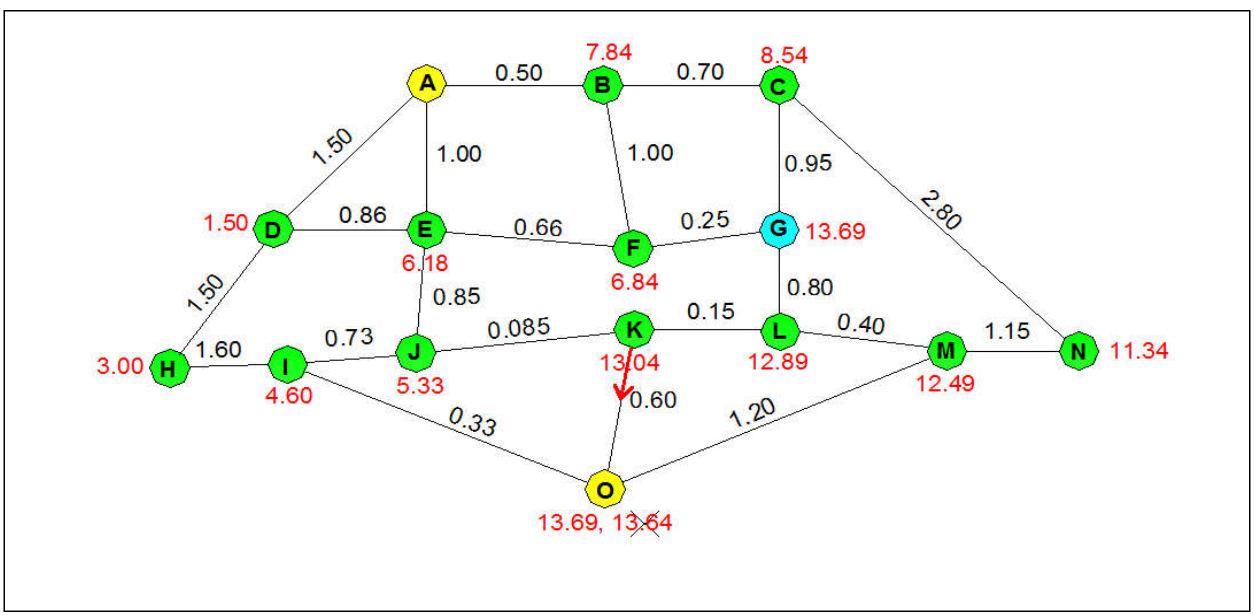



*Figura 4.5.12. Rruga më e gjatë A-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

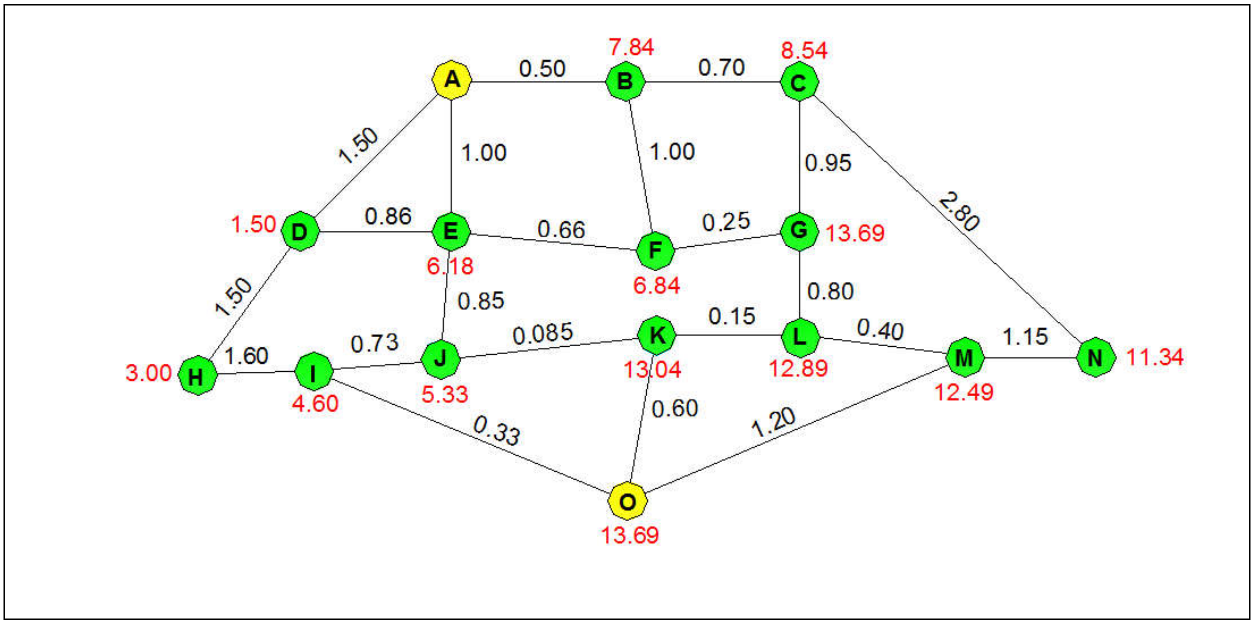



*Figura 4.5.13. Rruga më e gjatë A-O.*

**Llogaritja e rrugës maksimale A-O.**

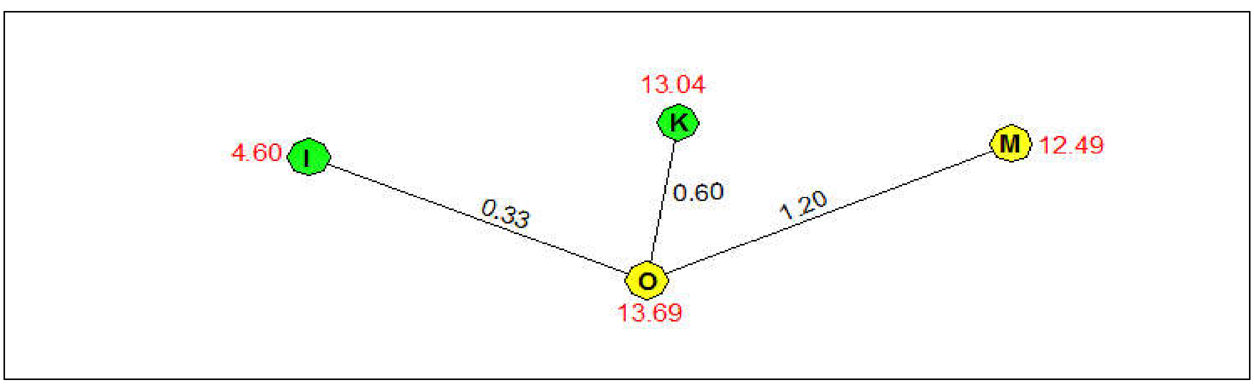
Tani mund të llogaritim rrugën maksimale prej kulmit A në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$13.69-0.33 \neq 4.60$$

$$13.69-0.60 \neq 13.04$$

$$13.69-1.20=12.49\surd$$



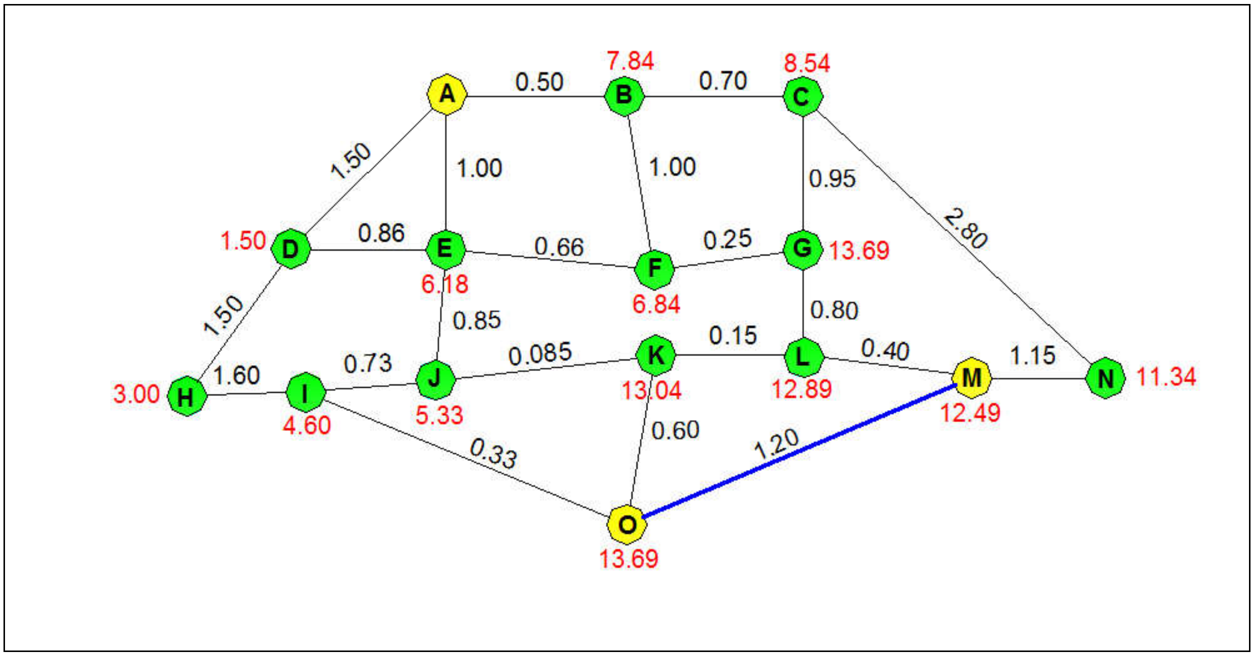
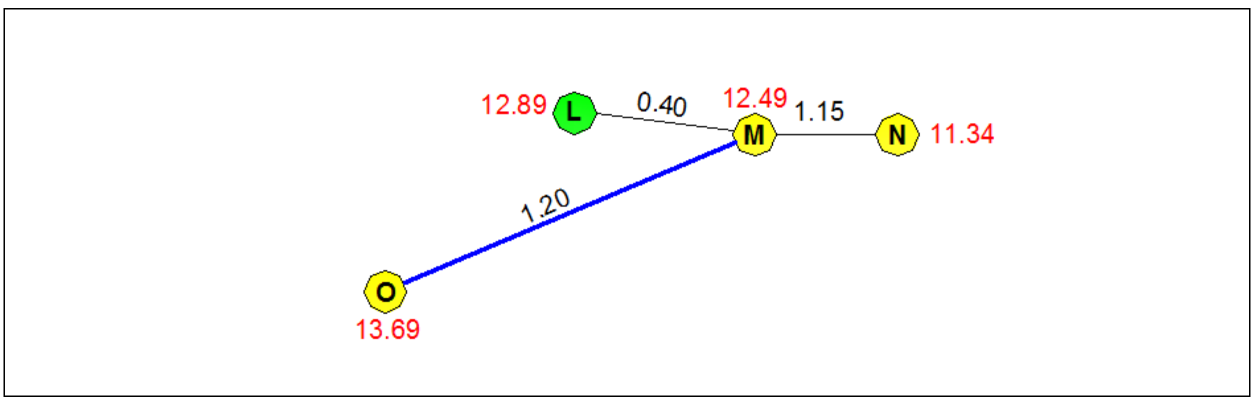



*Figura 4.5.14. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë. Tani prej kulmit M zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$12.49-0.40 \neq 12.89$$

$$12.49-1.12=11.34\surd$$



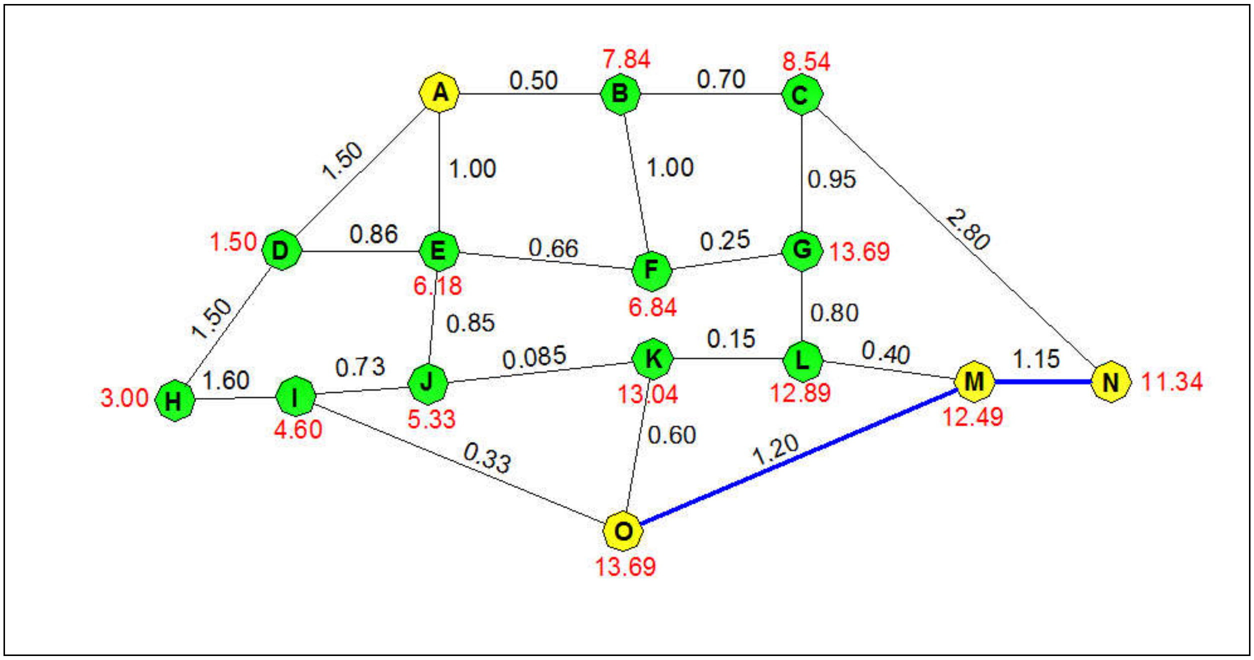
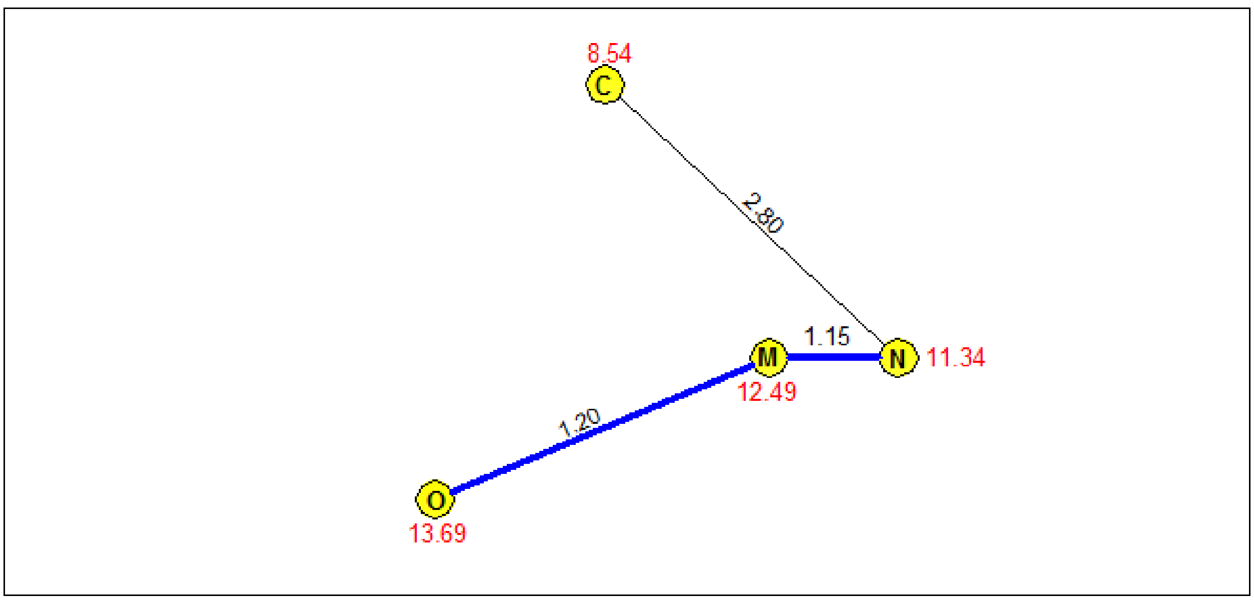



*Figura 4.5.15. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit N zbresim distancën e kulmit fqinjë

11.34-2.80=8.54√



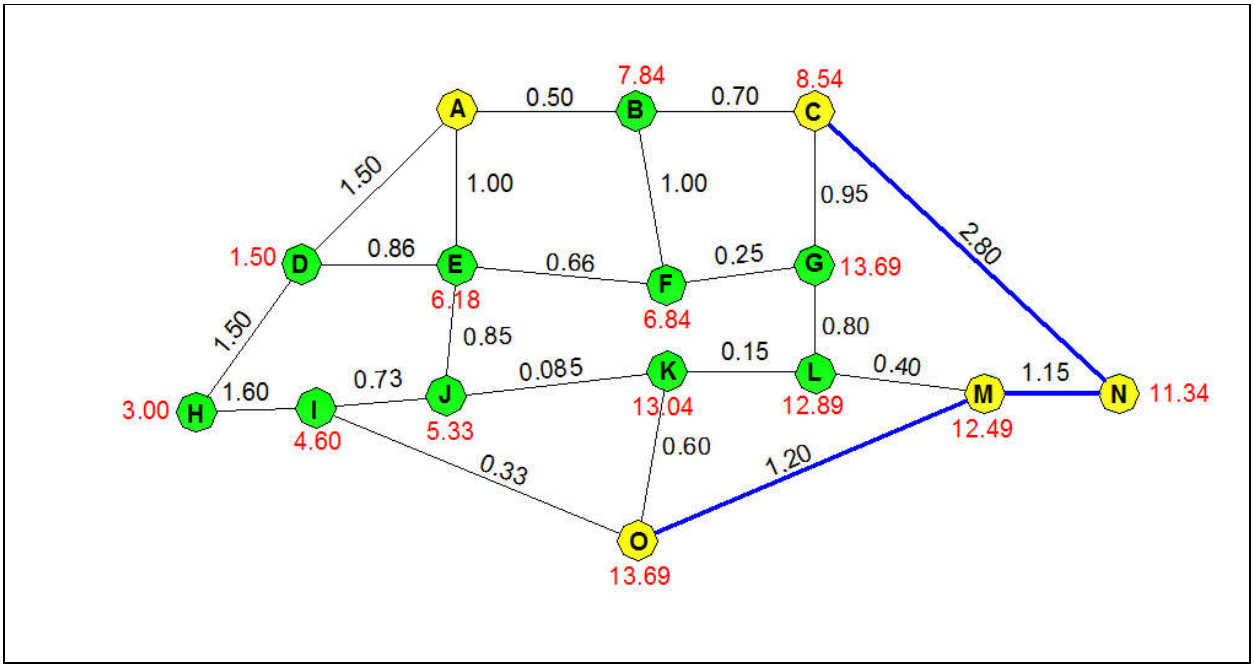
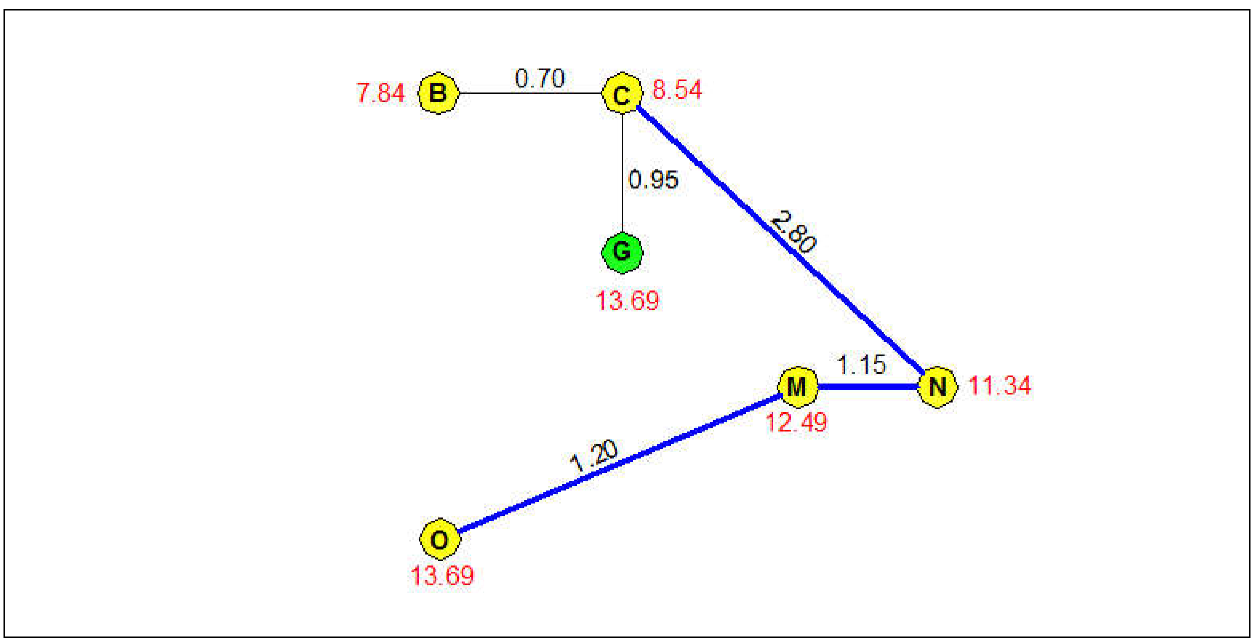



*Figura 4.5.16. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit C zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$8.54-0.70\neq7.84\surd$$

$$8.54-0.95\neq13.69$$



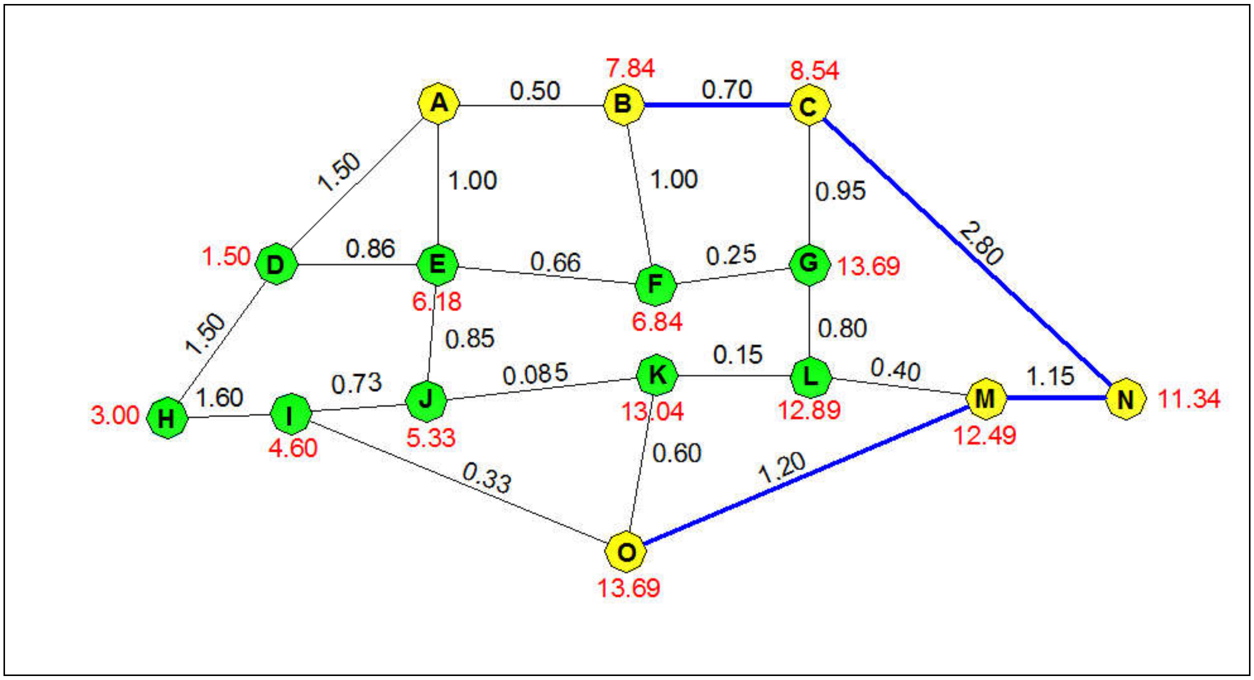
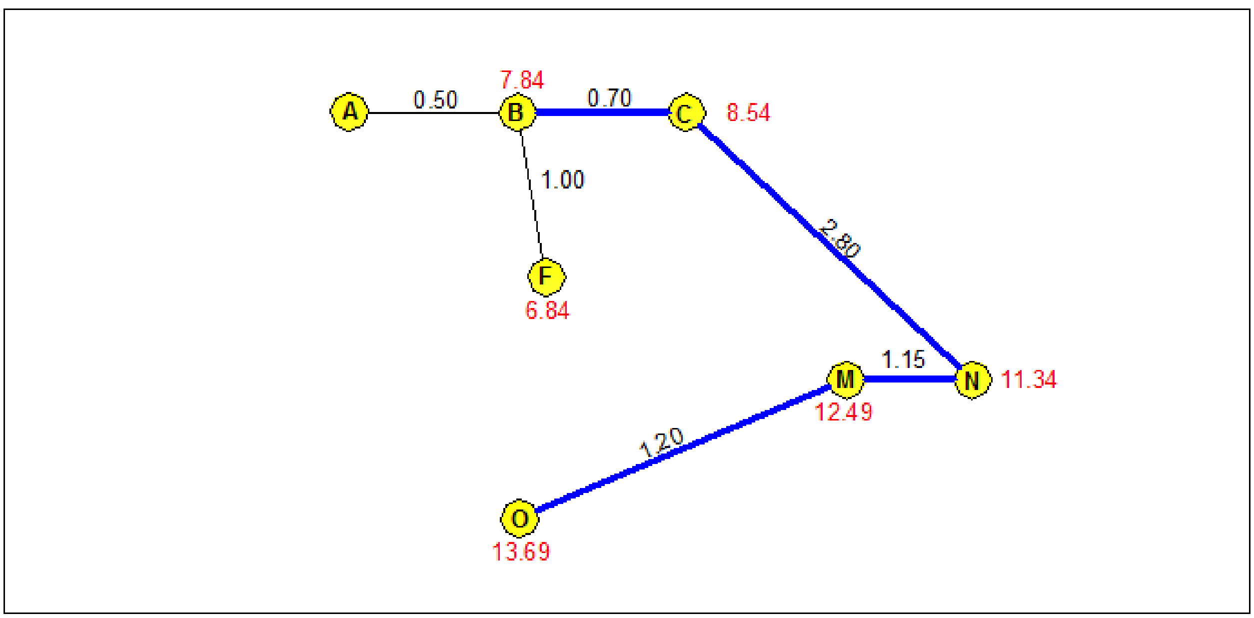



*Figura 4.5.17. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$7.84-0.50 \neq 0.00$$

$$7.84-1.00=6.84\surd$$



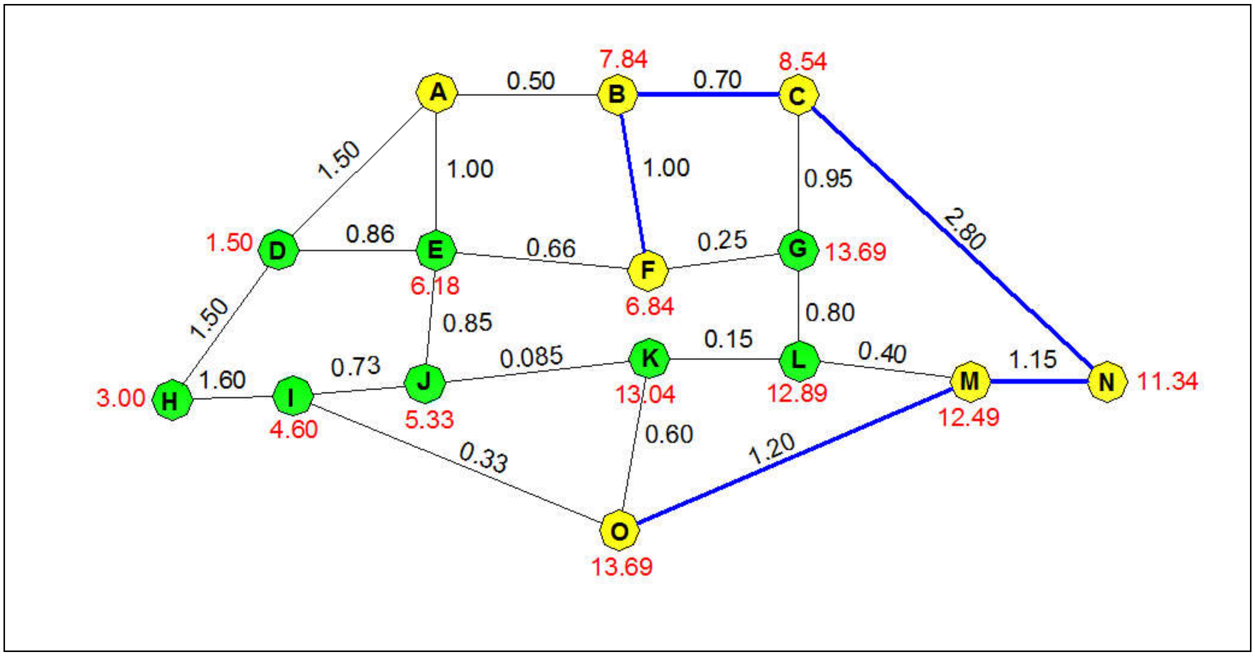
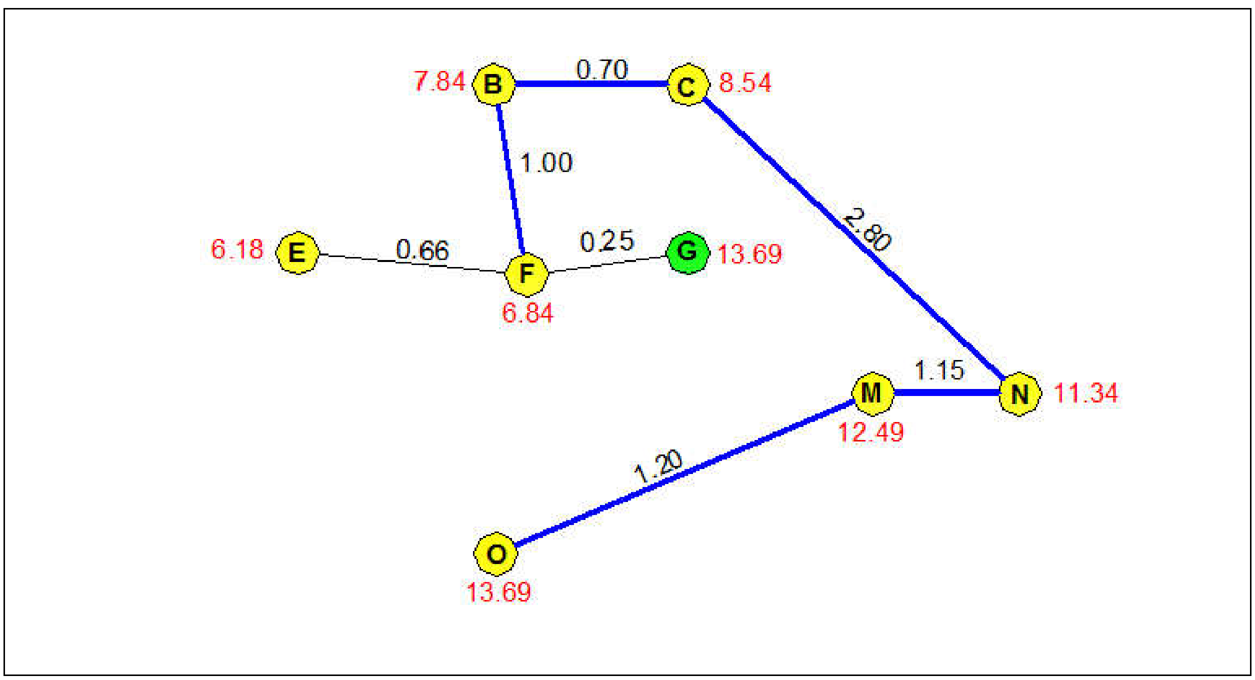



*Figura 4.5.18. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$6.84-0.66=6.18\surd$$

$$6.84-0.25\neq 13.69$$



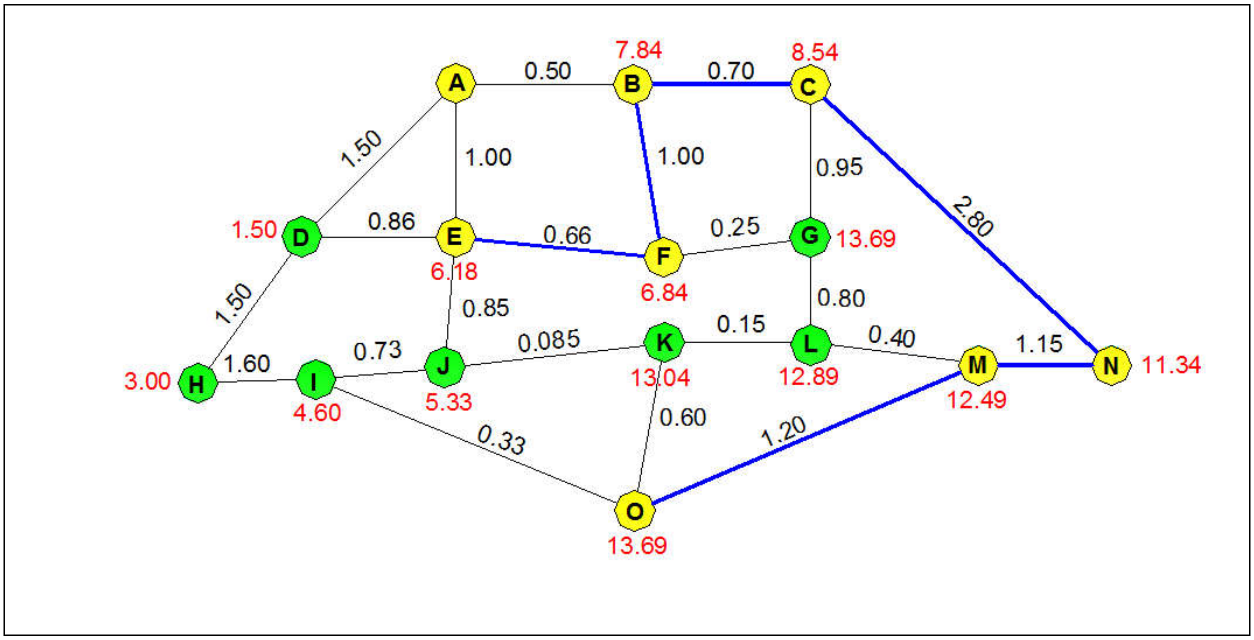


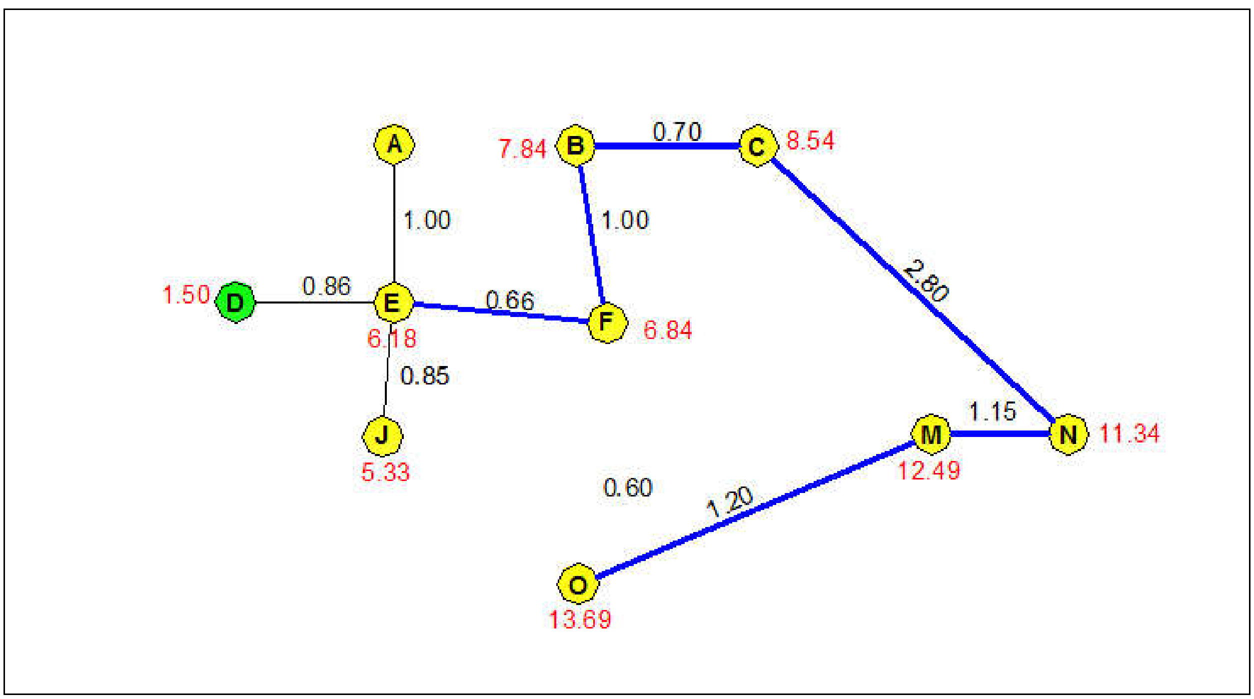

*Figura 4.5.19. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$6.18-1.00 \neq 0.00$$

$$6.18-0.86 \neq 1.50$$

$$6.18-0.85=5.33 \surd$$



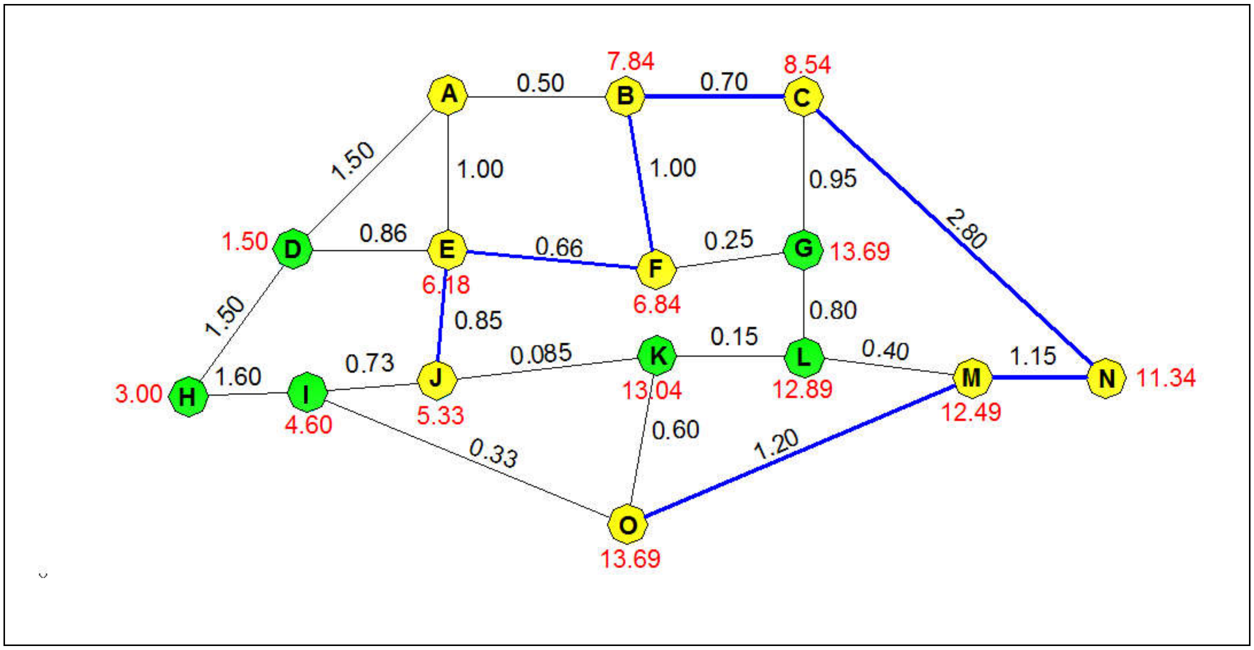
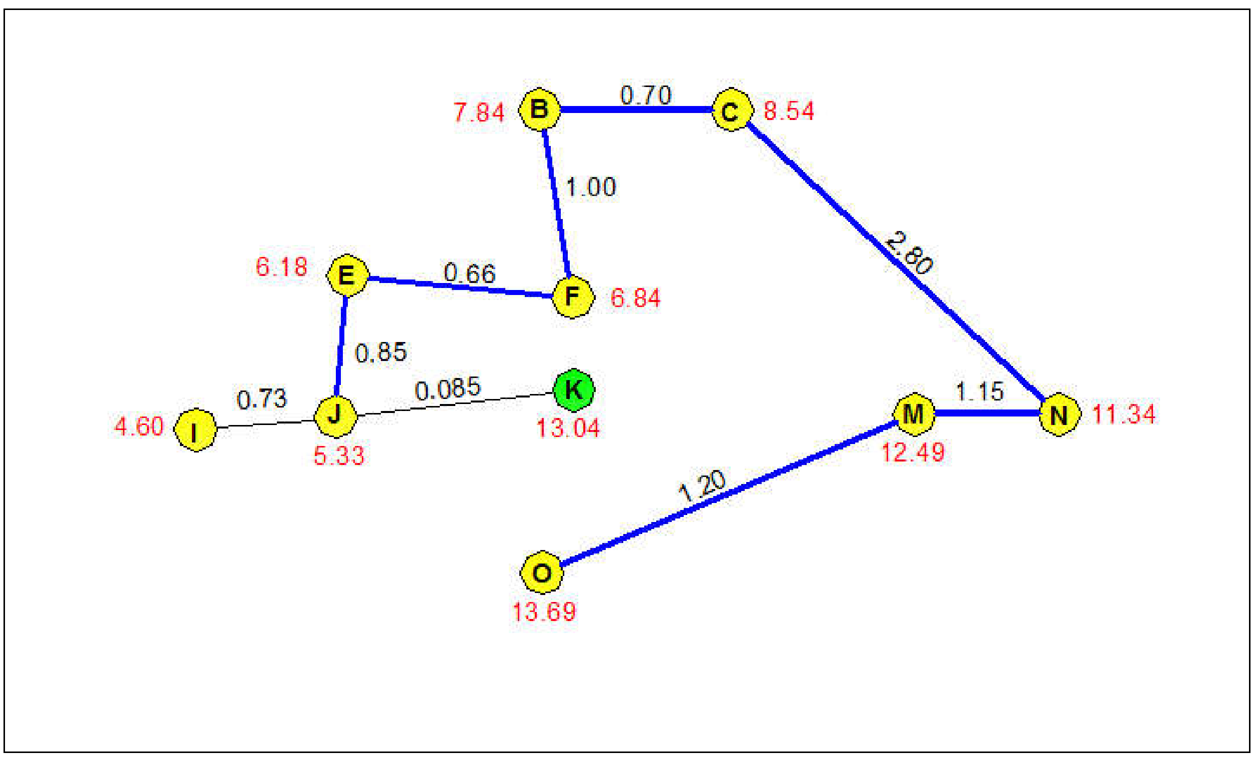



*Figura 4.5.20. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$5.33-0.73=4.60\surd$$

$$5.33-0.085\neq 13.04$$



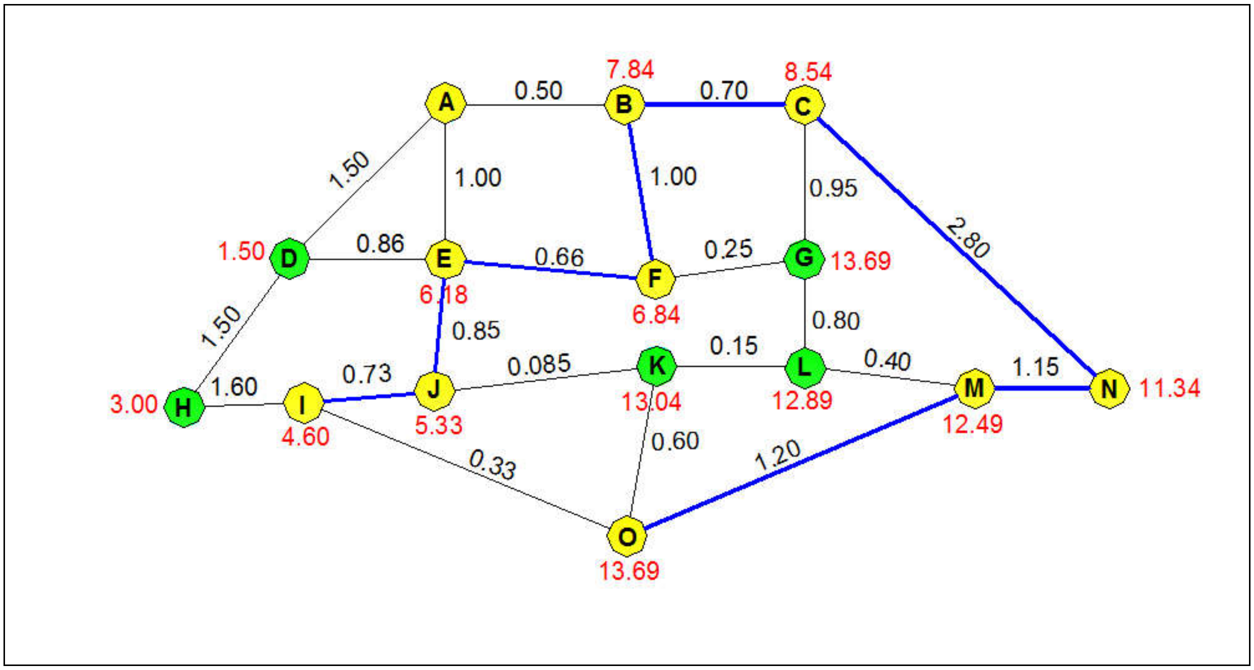
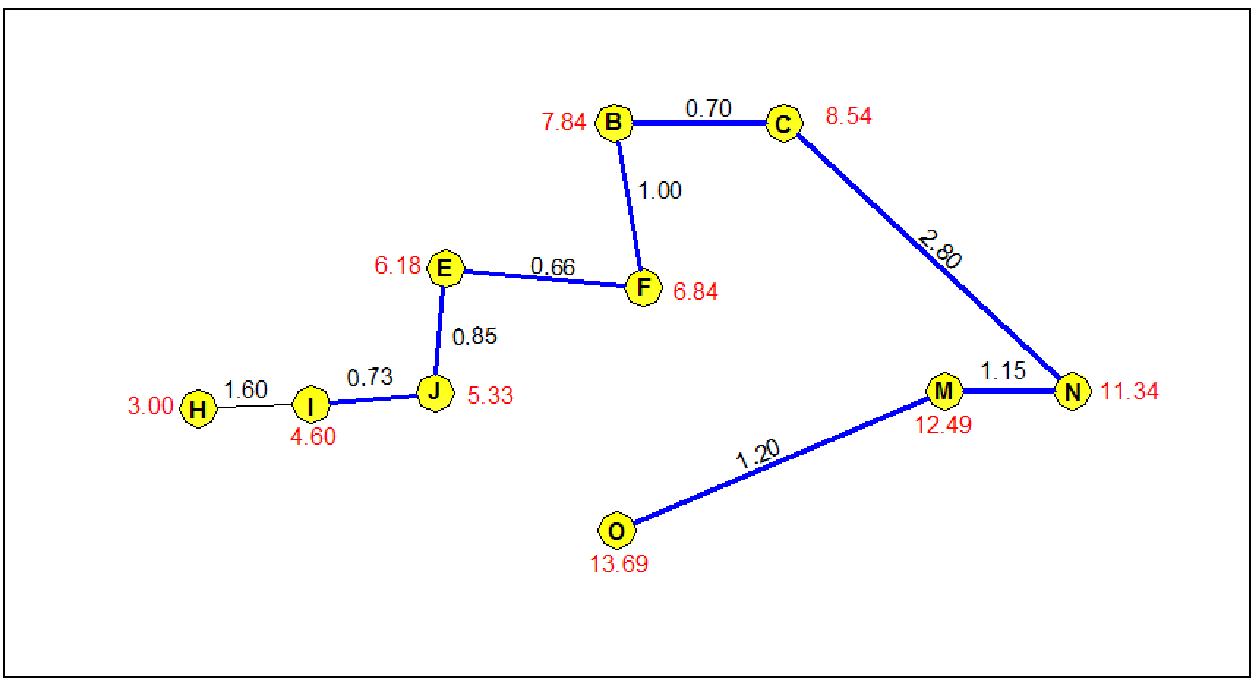



*Figura 4.5.21. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit I zbresim distancën e kulmit fqinjë.

4.60-1.60=3.00√



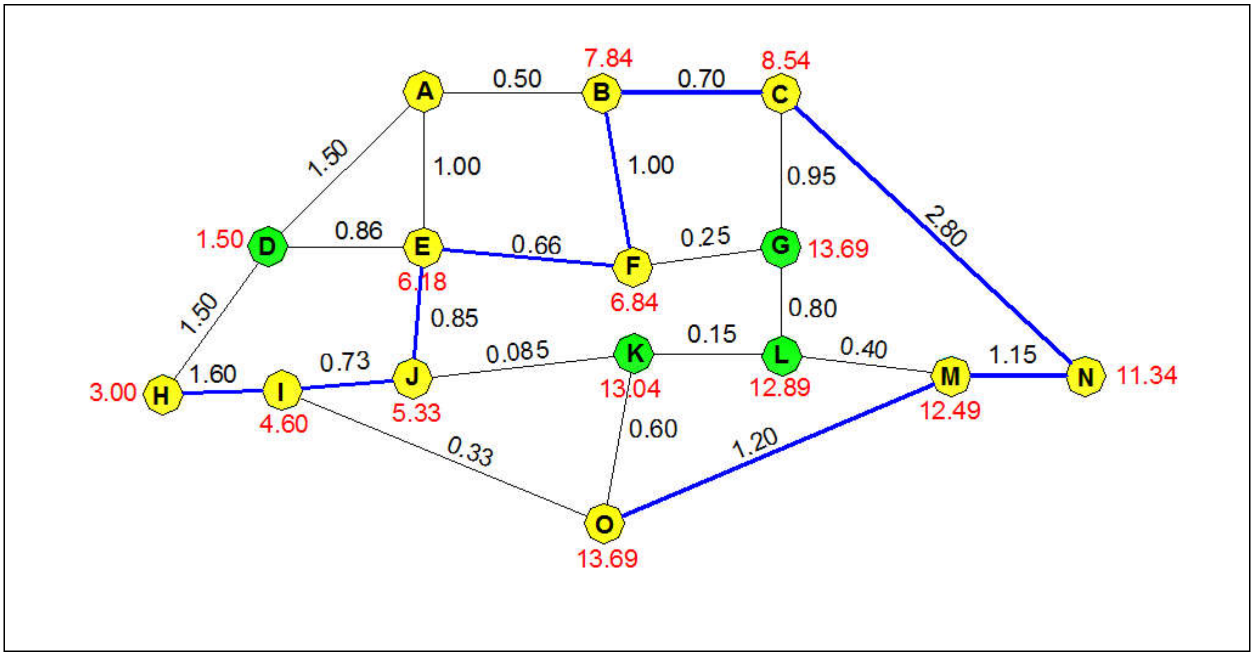
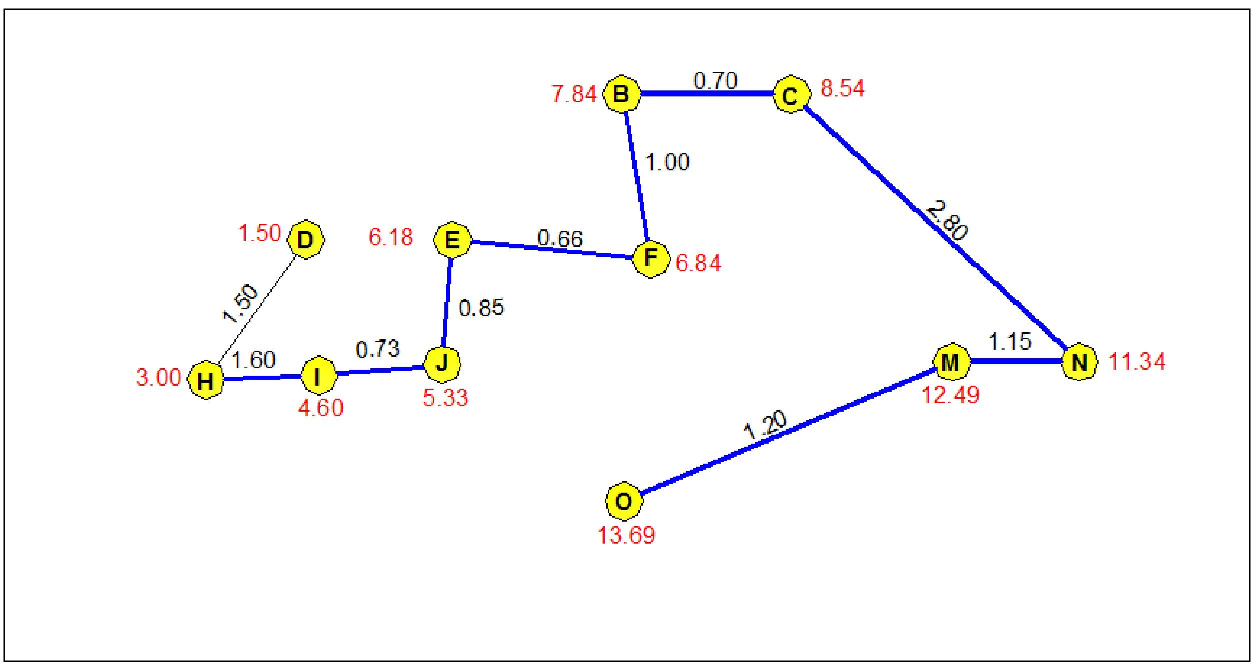



*Figura 4.5.22. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit H zbresim distancën e kulmit fqinjë.

3.00-1.50=1.50√



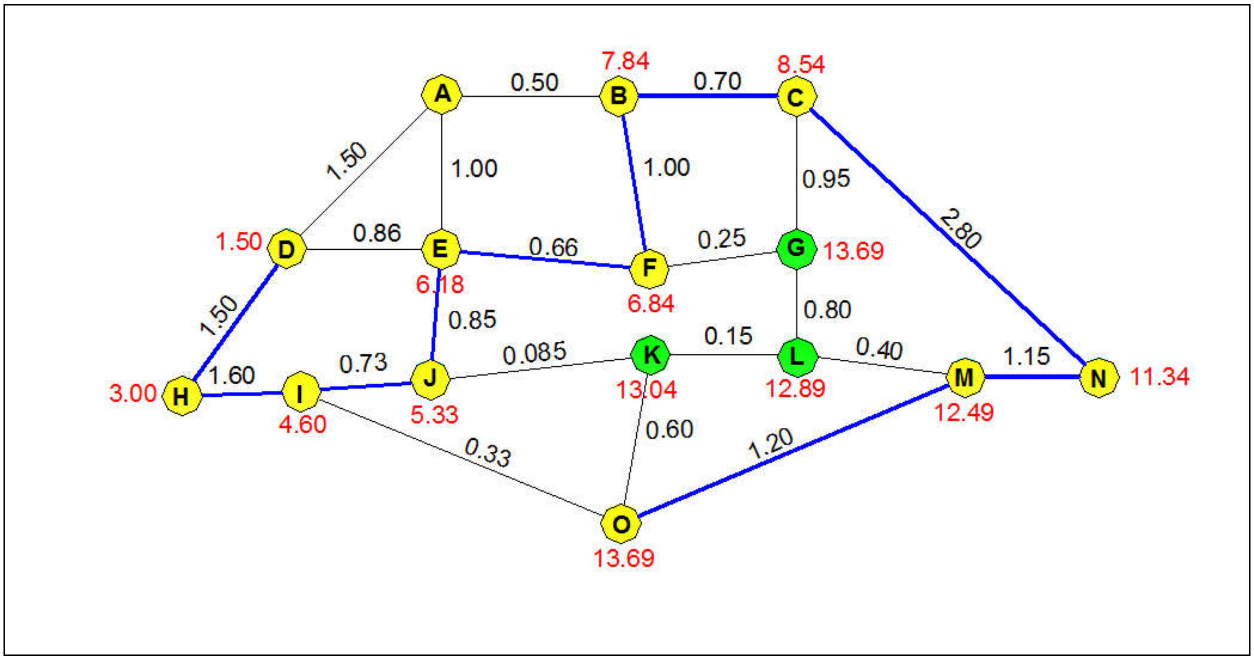
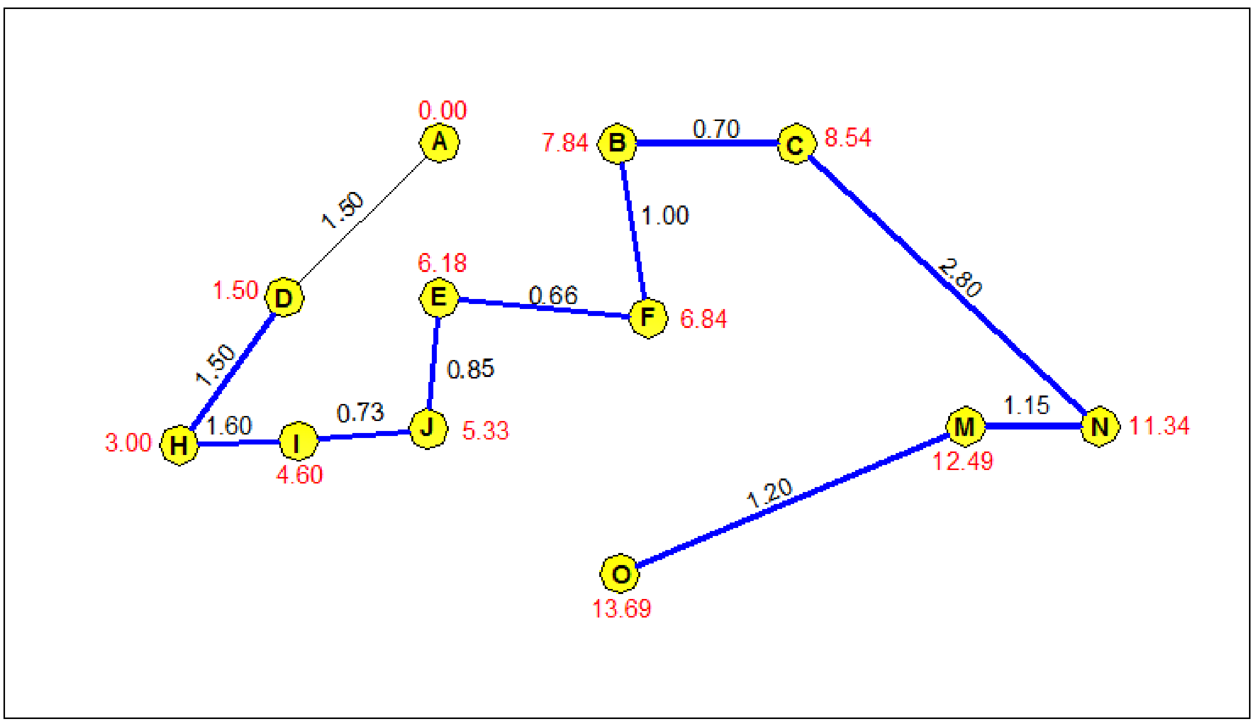



*Figura 4.5.23. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Pastaj prej kulmit D zbresim distancën e kulmit fqinjë.

$$1.50-1.50=0.00\surd$$



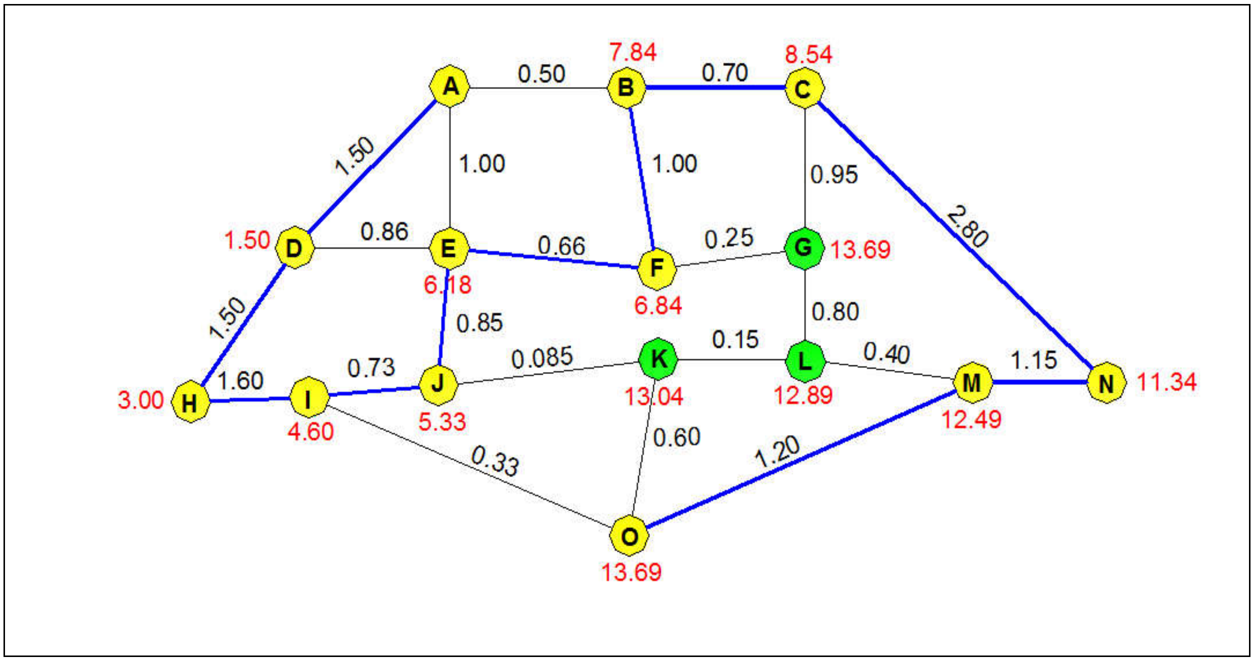



*Figura 4.5.24. Llogaritja e rrugës më të gjatë A-O.*

Rruga me gjatësinë më të gjatë është rruga A-D-H-J-E-F-B-C-N-M-O me gjatësi 13.69[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e gjatë prej kulmit A-O e paraqitur në hartë.

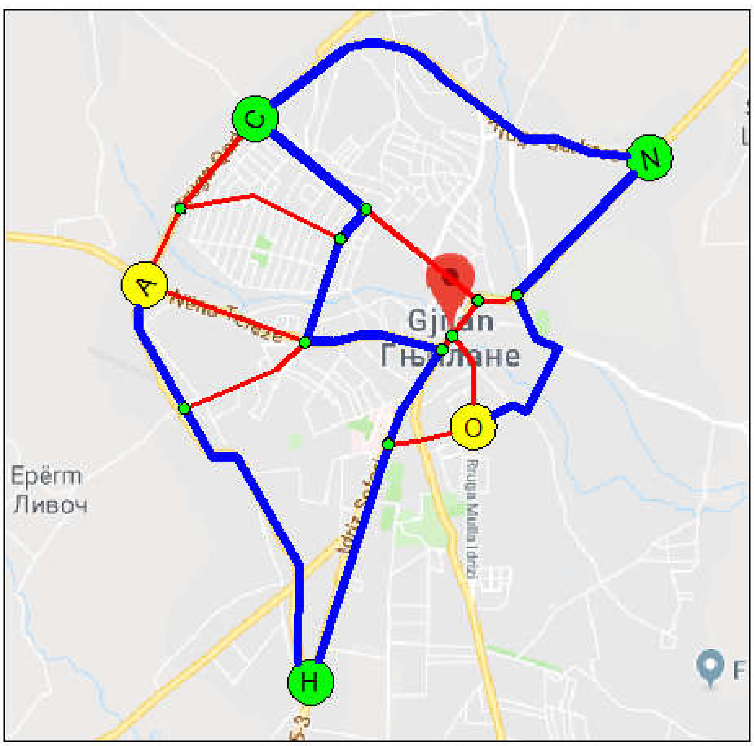



*Figura 4.5.25. Rruga më e gjatë A-O e paraqitur në hartë.*

## 4.6. RRUGA MË E GJATË PREJ KULMIT C NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MAKSIMALE

Së pari fillojmë nga kulmi C duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi C në kulmet (B, G dhe N).

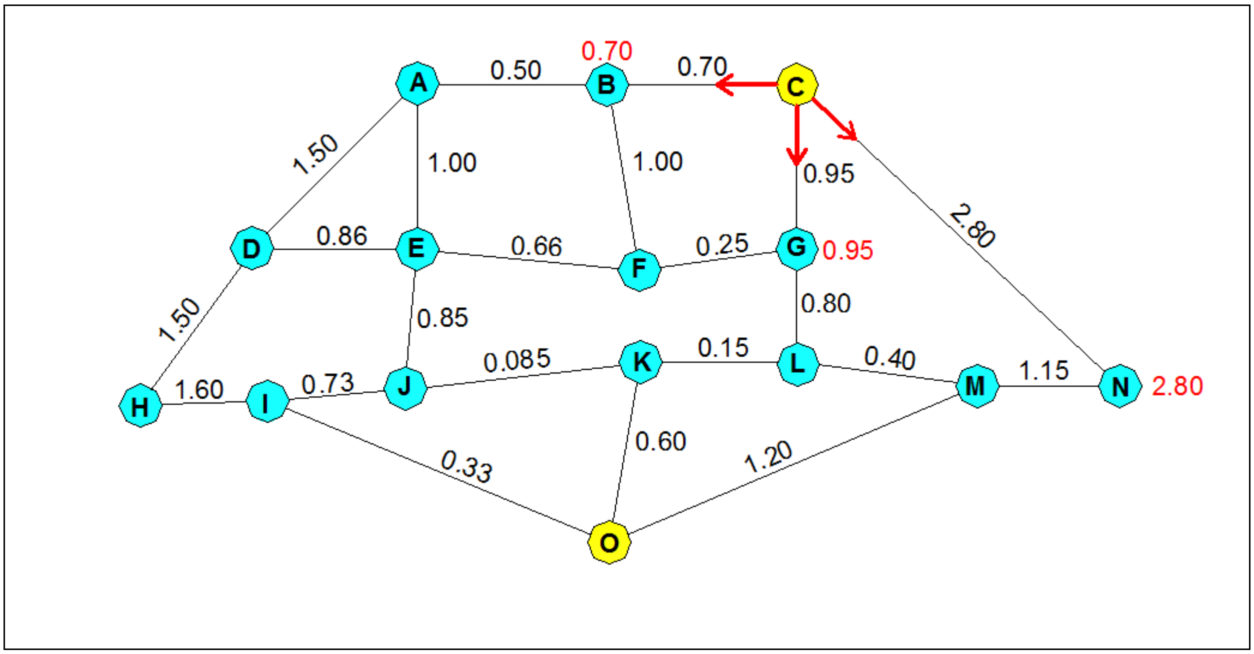



*Figura 4.6.0. Rruga më e gjatë C-O.*

Distanca më e gjatë prej kulmit C në kulmet fqinjë (B, G dhe N) është 2.80.

Pastaj kulmin N me distancën 2.80 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit N me distancë 2.80.

Kulmit fqinjë (kulmit M) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

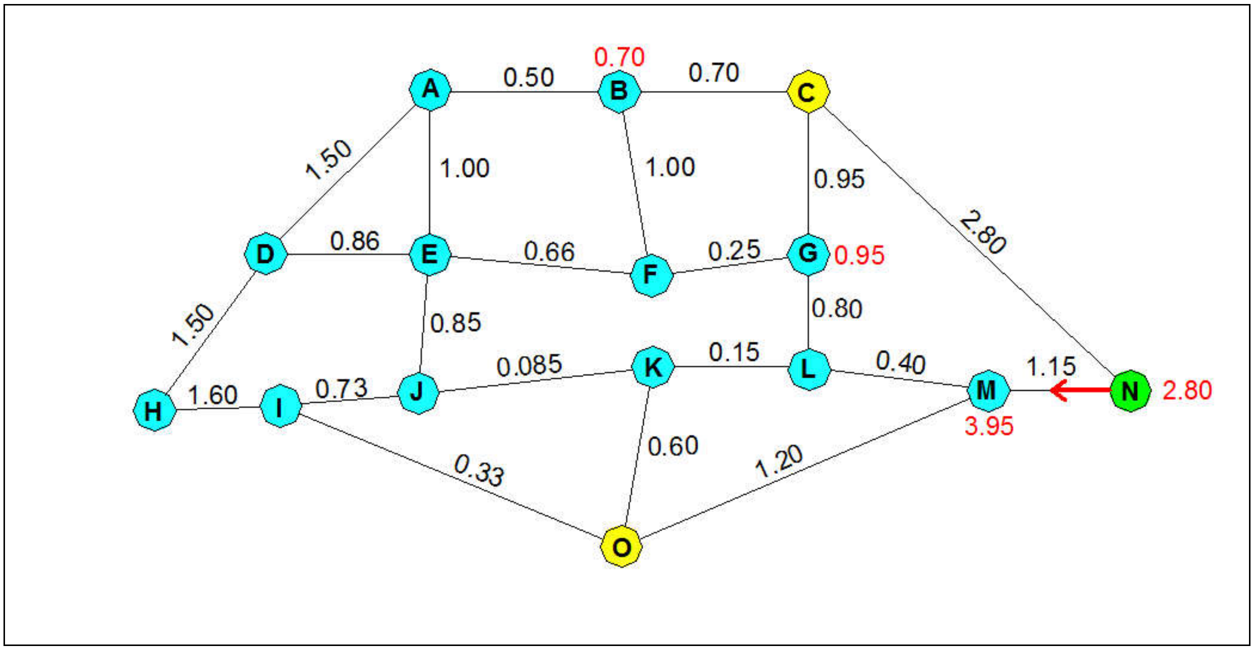



*Figura 4.6.1. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të gjatë e cila është 3.95.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 3.95.

Secilit kulm fqinjë (kulmit L dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

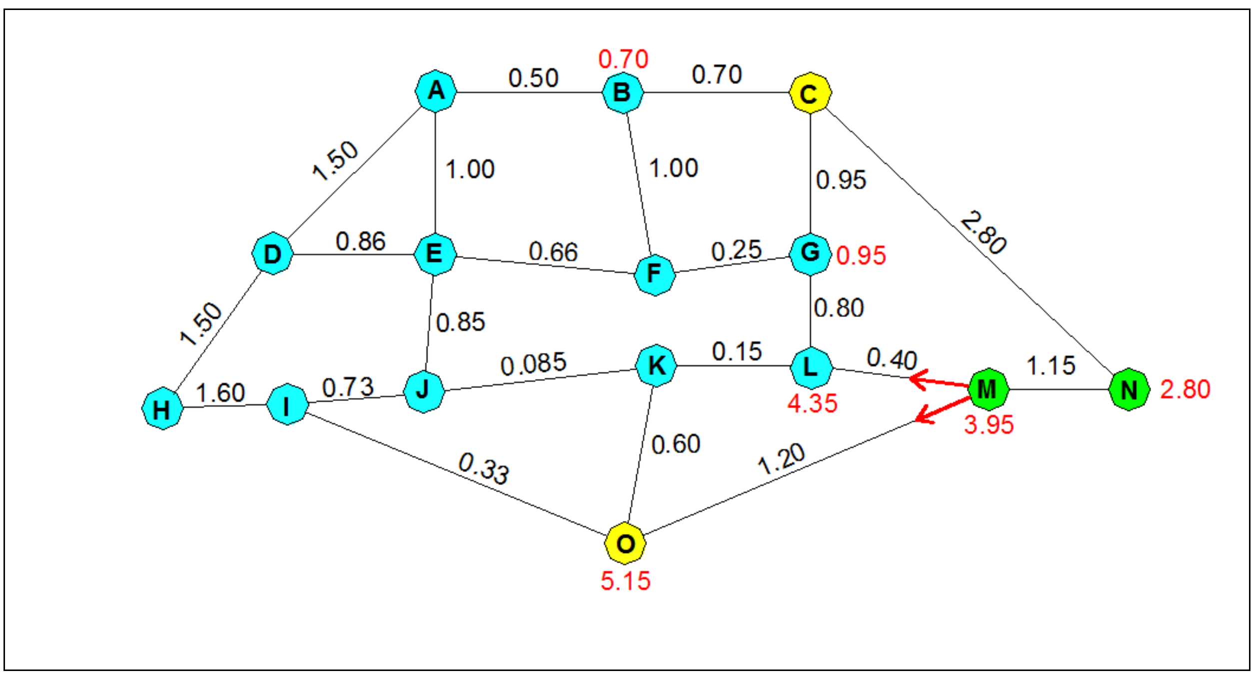



*Figura 4.6.2. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të gjatë e cila është 4.35.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 4.35.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit G dhe K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi L në kulmin G është më e gjatë, 5.15>0.95, atëherë e eleminojmë distancën 0.95.

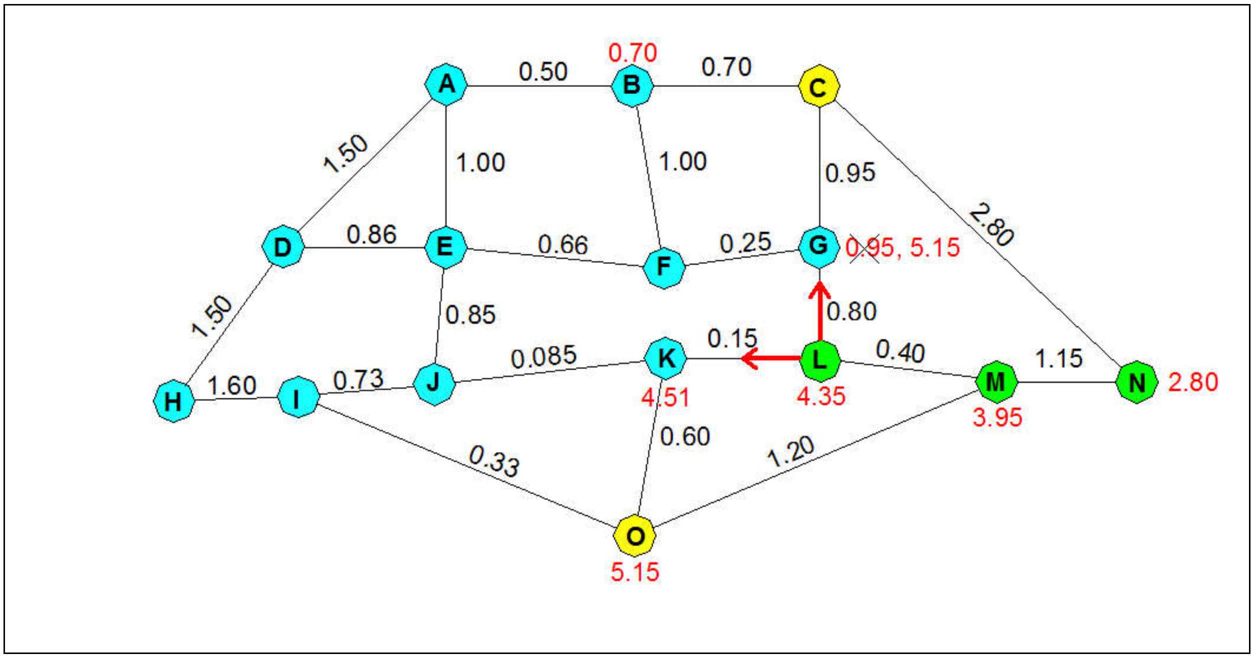



*Figura 4.6.3. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të gjatë e cila është 5.15.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 5.15.

Kulm fqinjë ( kulmit F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

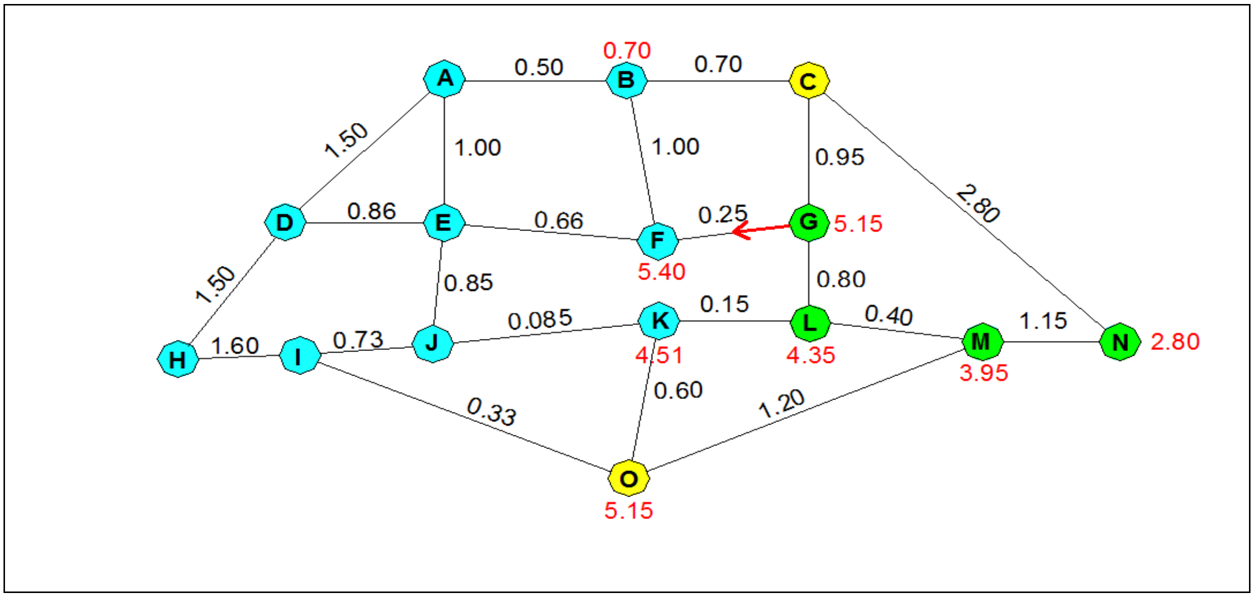



*Figura 4.6.4. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të gjatë e cila është 5.40.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 5.40.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit B dhe E) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi F në kulmin B është më e gjatë, 6.40>0.70, atëherë e eleminojmë distancën 0.70.

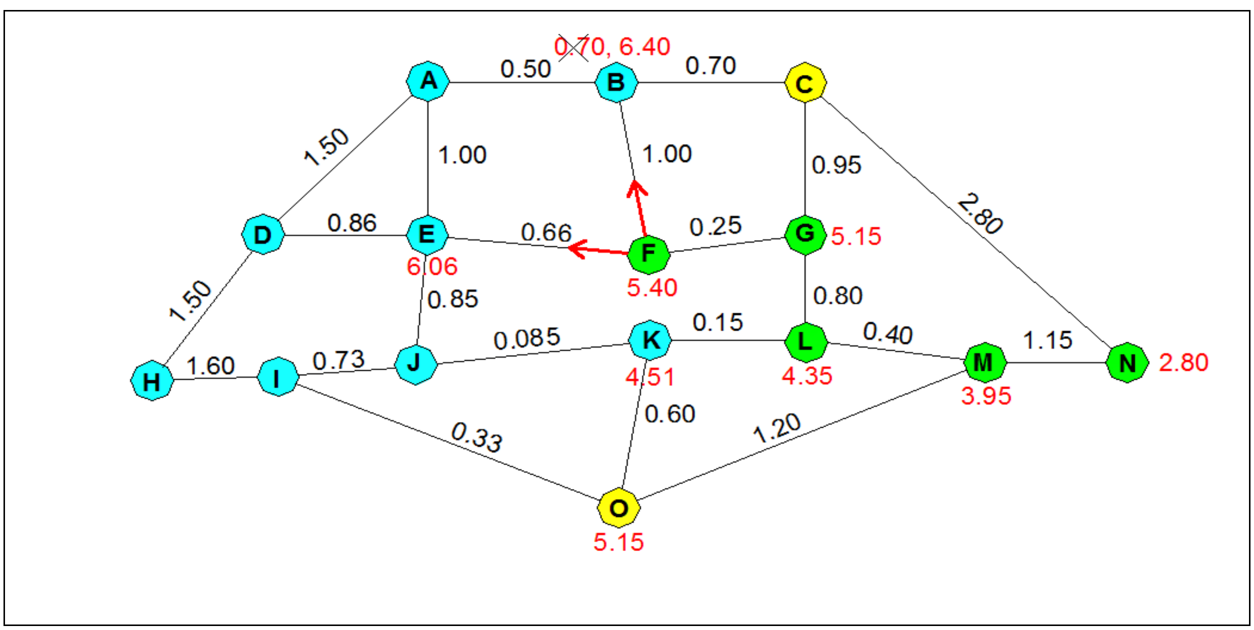



*Figura 4.6.5. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin B me distancën më të gjatë e cila është 6.40.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 6.40.

Kulmit fqinjë ( kulmit A) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

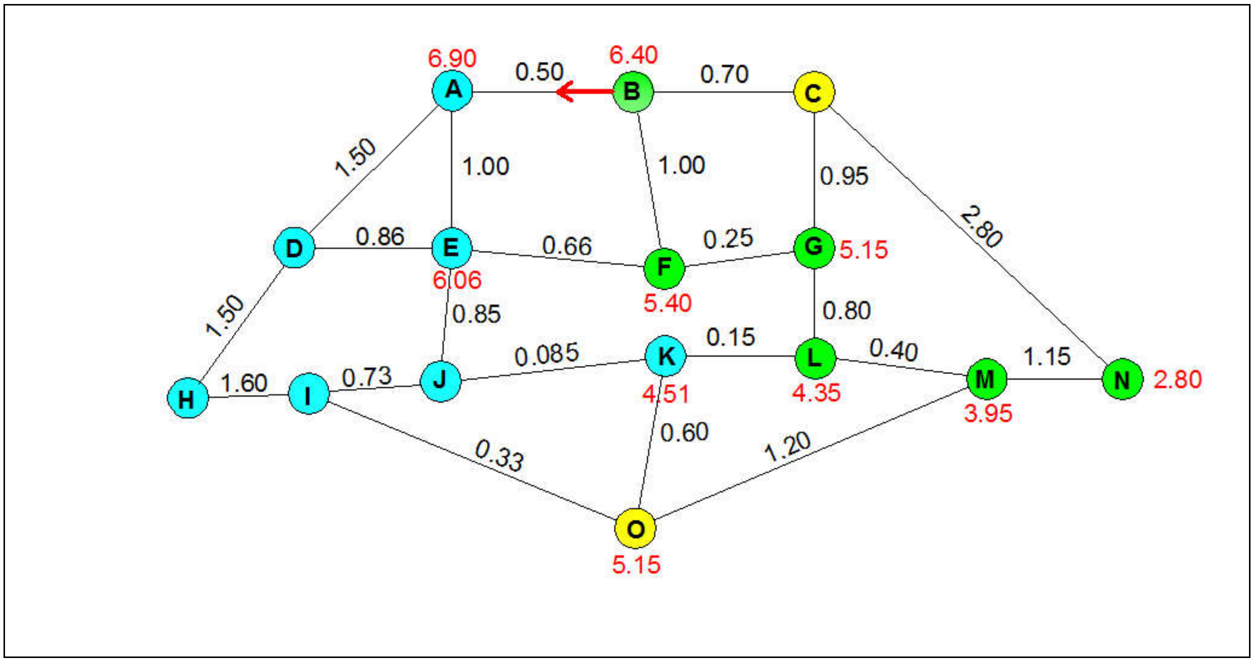



*Figura 4.6.6. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin A me distancën më të gjatë e cila është 6.90.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit A me distancë 6.90.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit D dhe E) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi A në kulmin E është më e gjatë, 7.90>6.06, atëherë e eleminojmë distancën 6.06.

.

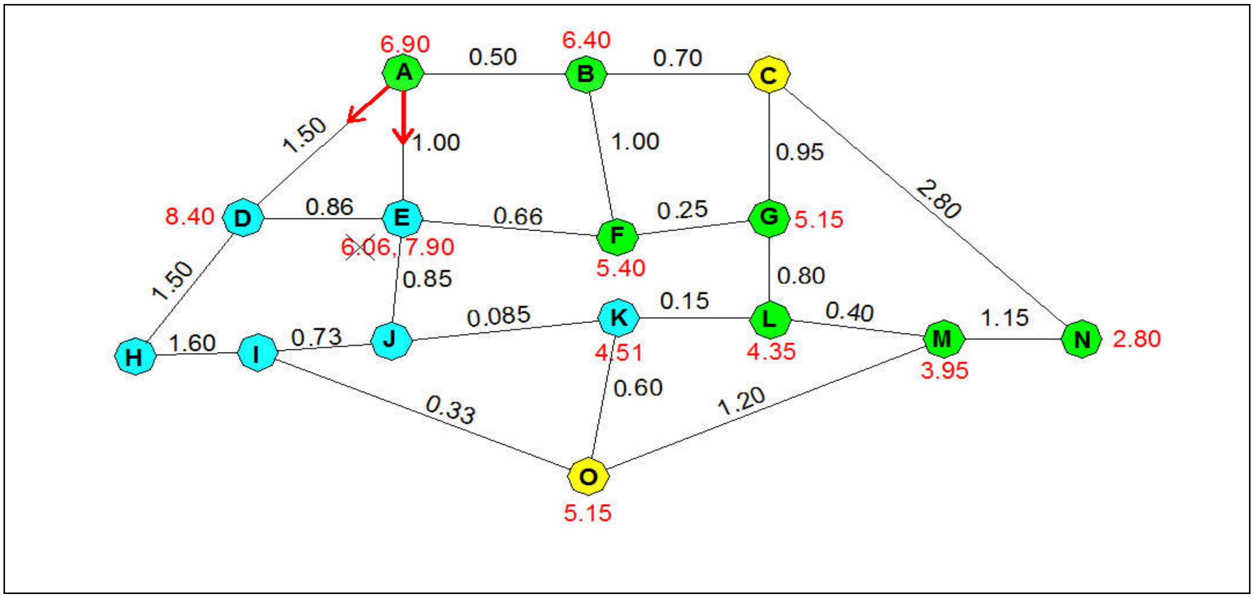



*Figura 4.6.7. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin D me distancën më të gjatë e cila është 8.40.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 8.40.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit E dhe H) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi A në kulmin E është më e gjatë, 9.26>7.90, atëherë e eleminojmë distancën 7.90.

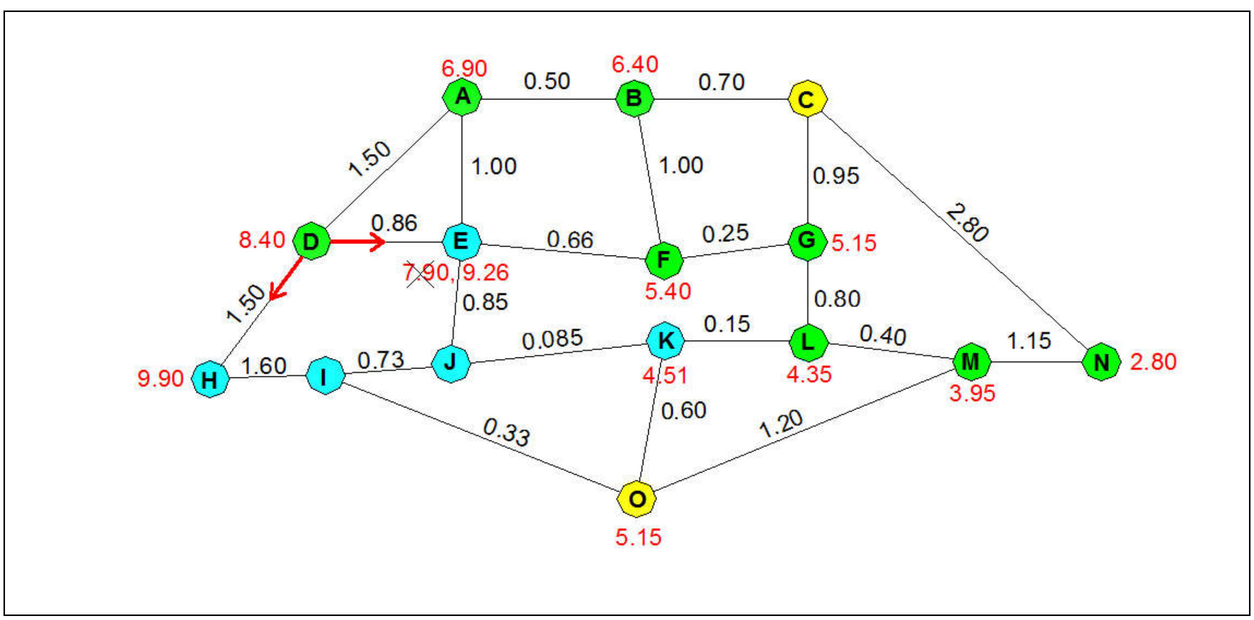



*Figura 4.6.8. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin H me distancën më të gjatë e cila është 9.90.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit H me distancë 9.90.

Kulmit fqinjë ( kulmit I) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

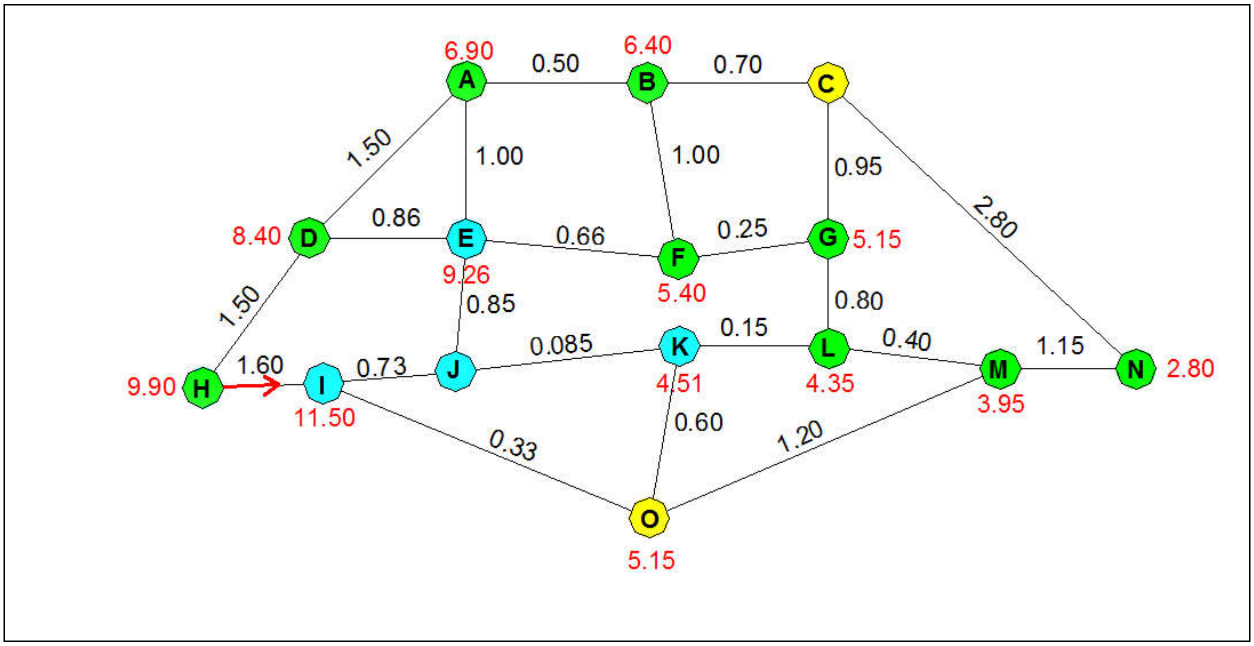



*Figura 4.6.9. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të gjatë e cila është 11.50.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 11.50.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit J dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi I në kulmin O është më e gjatë, 11.83>5.15, atëherë e eleminojmë distancën 5.15.

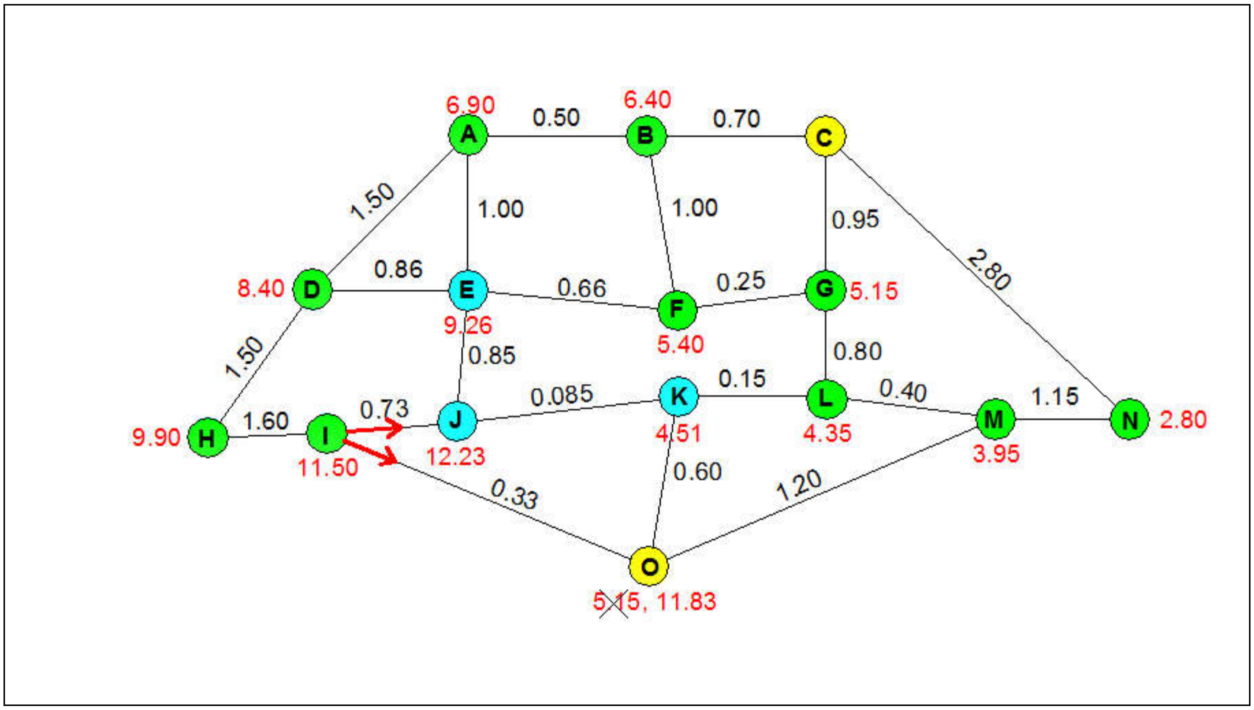



*Figura 4.6.10. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të gjatë e cila është 12.23.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 12.23.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit E dhe K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi J në kulmin E është më e gjatë, 13.08>9.26, atëherë e eleminojmë distancën 9.26.

Gjithashtu edhe distanca nga kulmi J në kulmin K është më e gjatë, 12.31>4.51, atëherë e eleminojmë distancën 4.51.

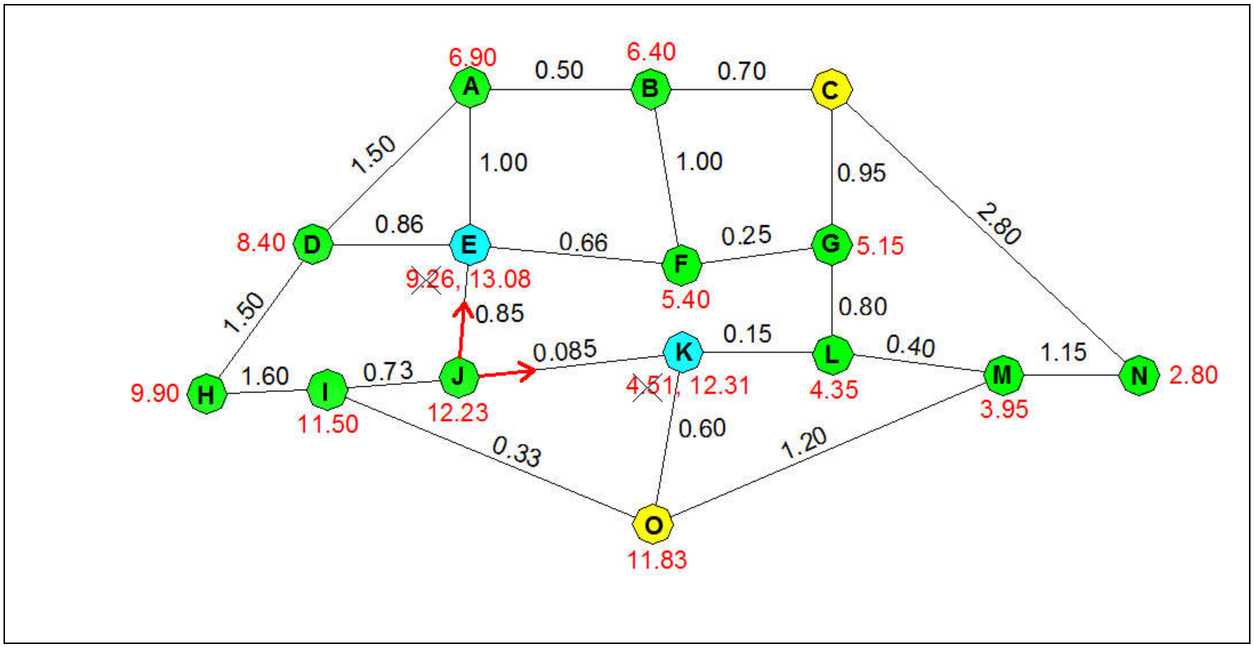



*Figura 4.6.11. Rruga më e gjatë C-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi C.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të gjatë e cila është 12.31.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 12.31.

Kulmit fqinjë ( kulmit O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi K në kulmin O është më e gjatë, 12.91>11.83, atëherë e eleminojmë distancën 11.83.

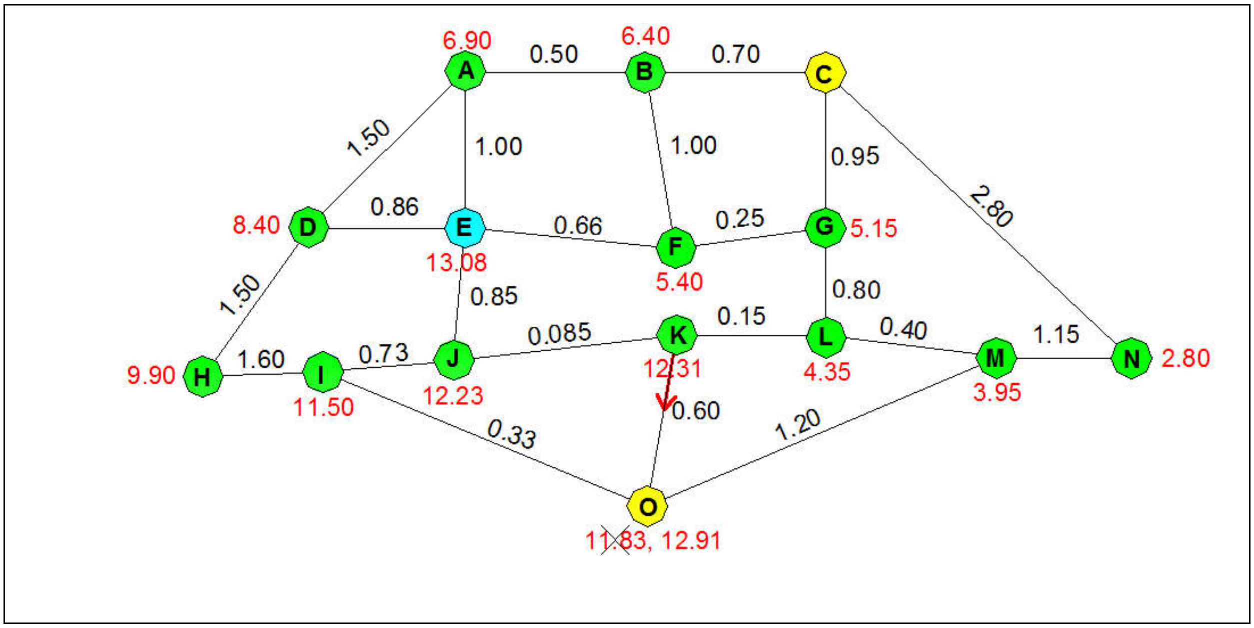



*Figura 4.6.12. Rruga më e gjatë C-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

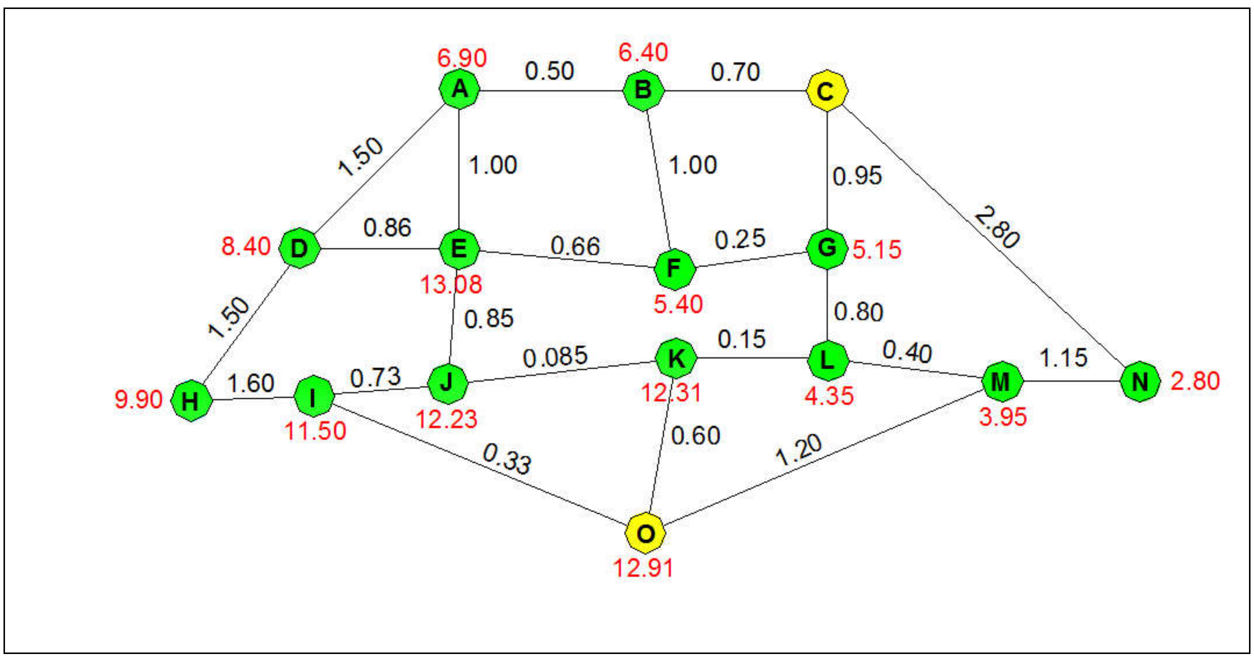



*Figura 4.6.13. Rruga më e gjatë C-O.*

**Llogaritja e rrugës maksimale C-O.**

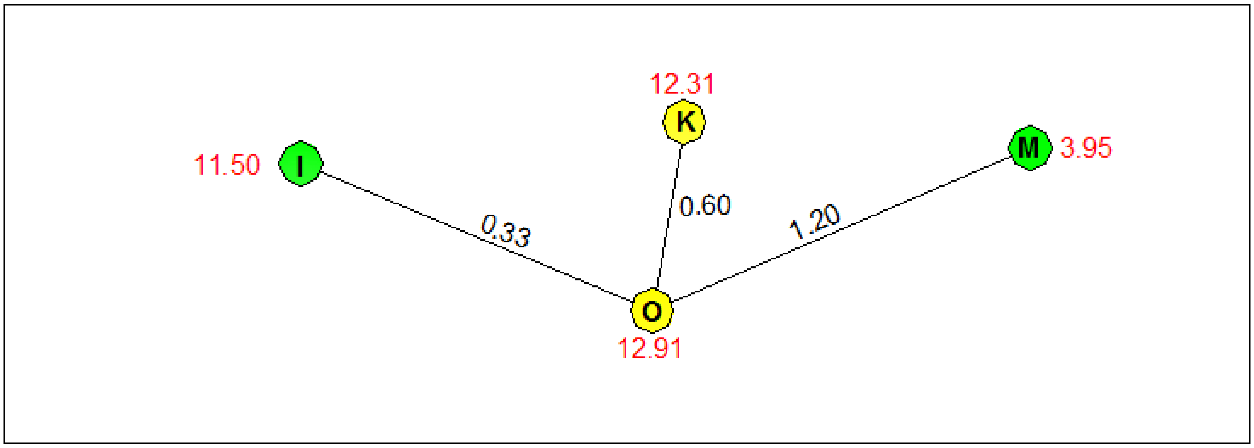
Tani mund të llogaritim rrugën maksimale prej kulmit C në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

12.91-0.33≠11.50

12.91-0.60=12.31√

12.91-1.20≠3.95



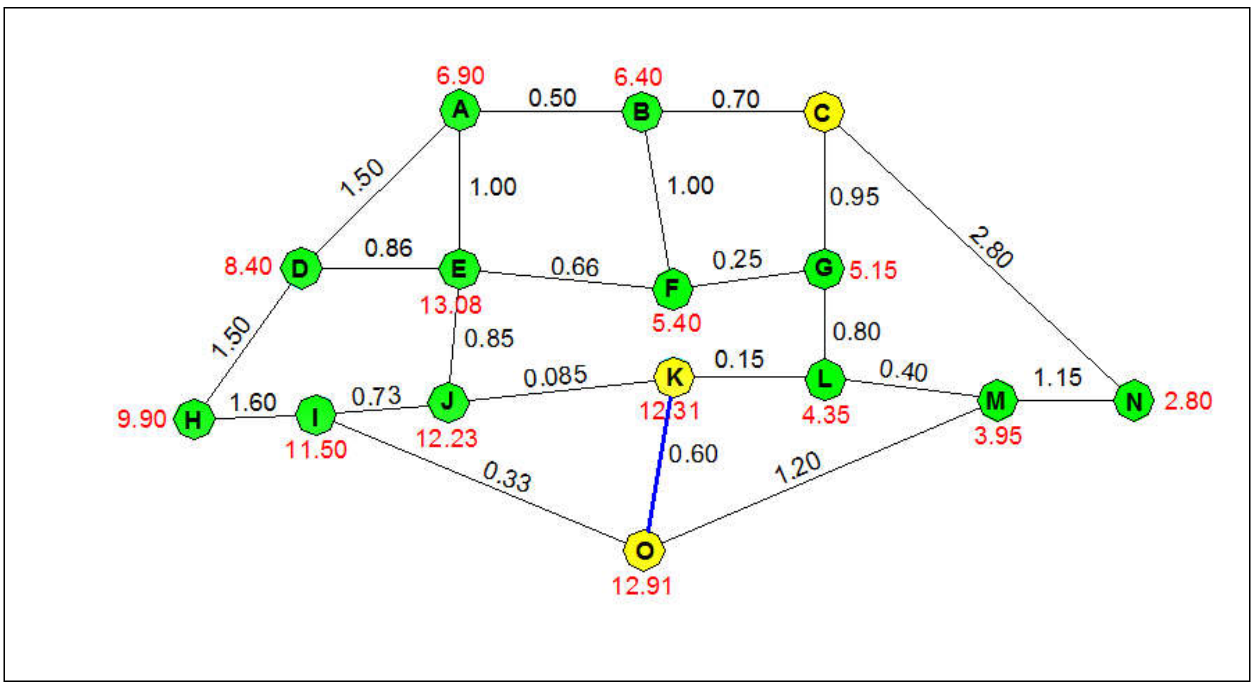
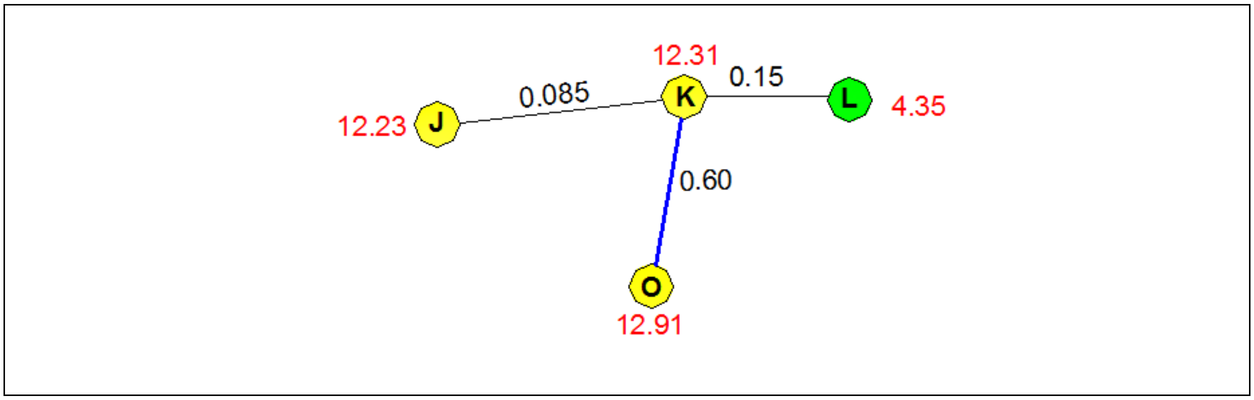




*Figura 4.6.14. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë.Tani prej kulmit K zbresim distancën e kulmeve fqinje.

12.31-0.085=12.23√

12.31-0.152≠4.35



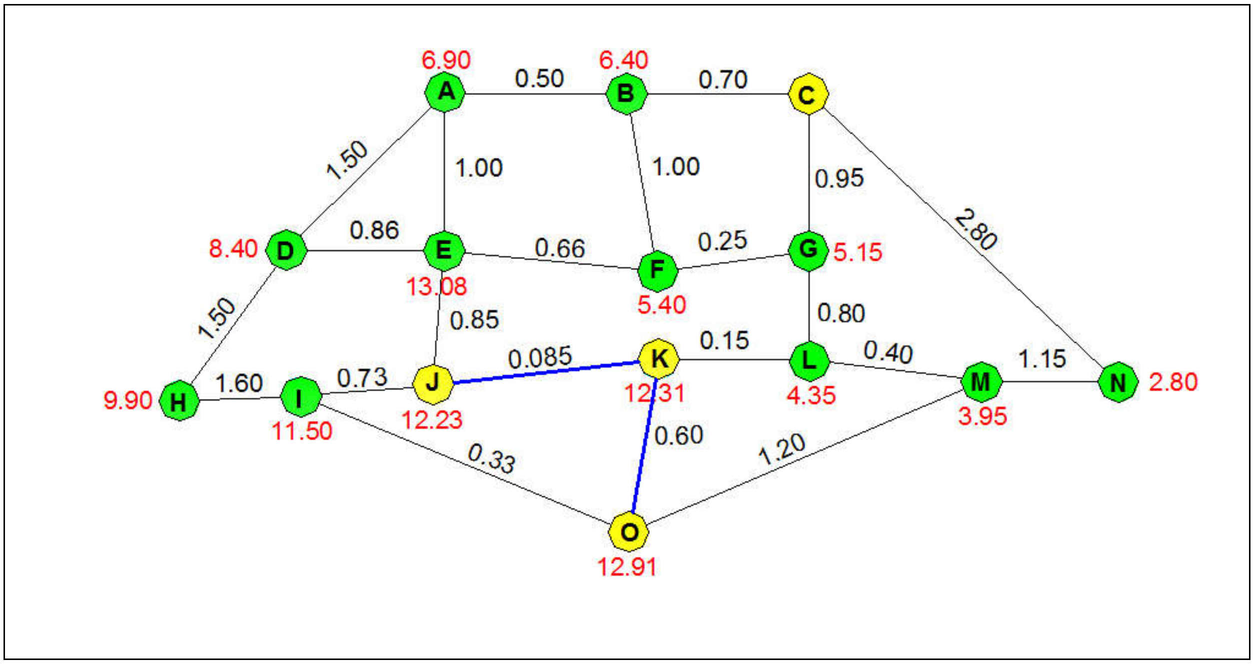
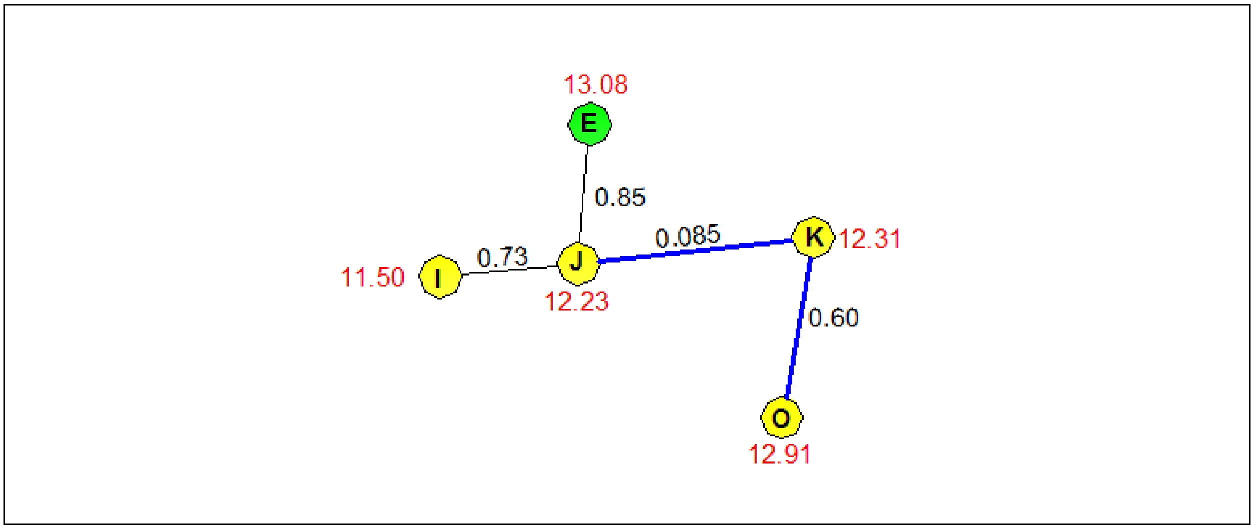




*Figura 4.6.15. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit J zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$12.23-0.85 \neq 13.08$$

$$12.23-0.73=11.50\surd$$



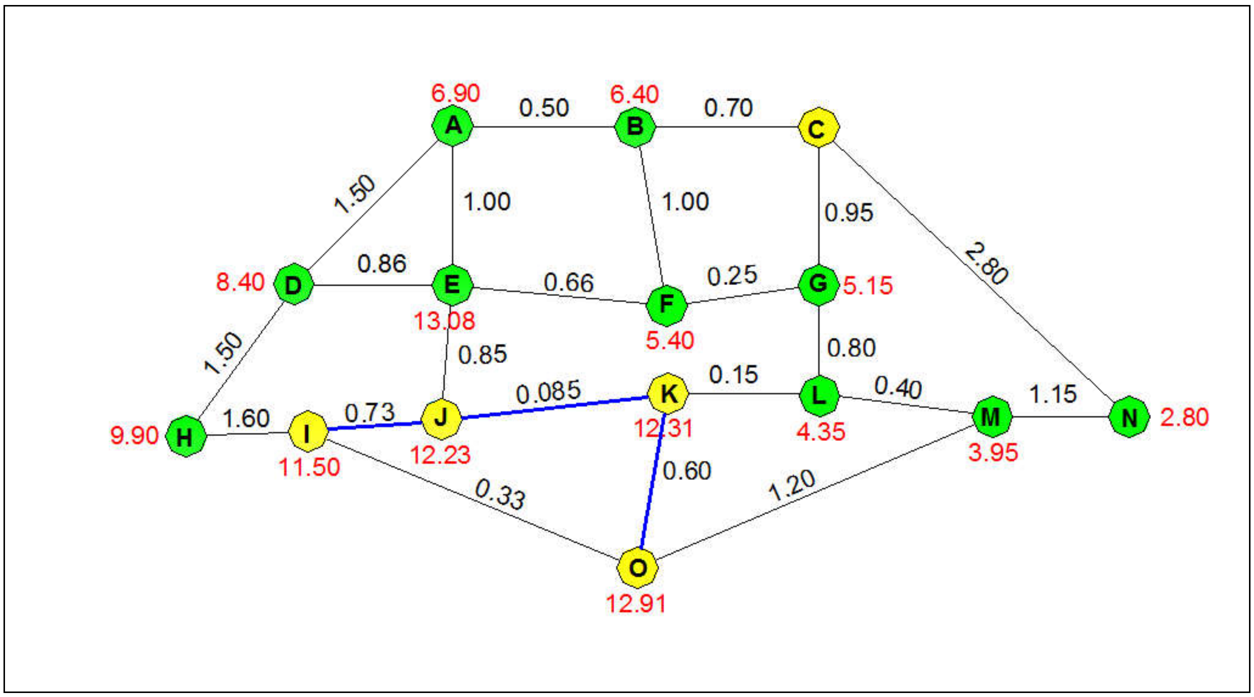
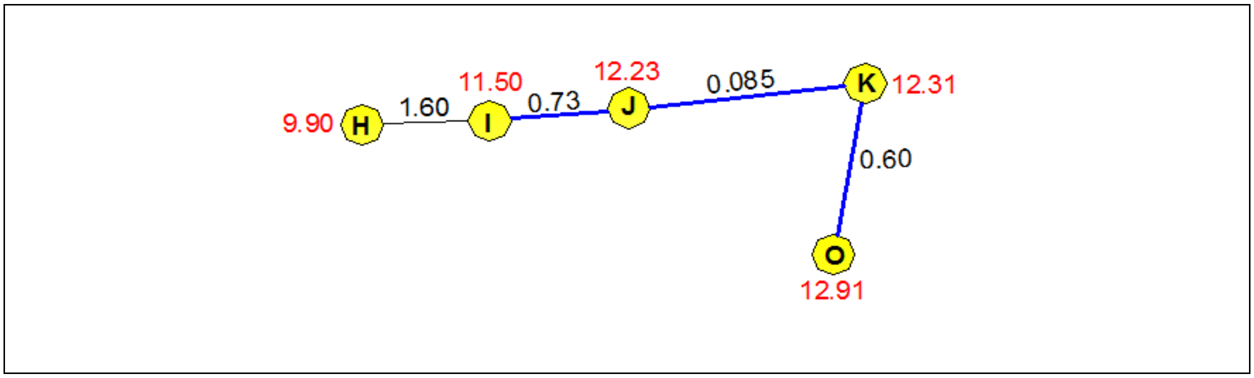




*Figura 4.6.16. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit I zbresim distancën e kulmit fqinjë.

$$11.50-1.60=9.90\surd$$



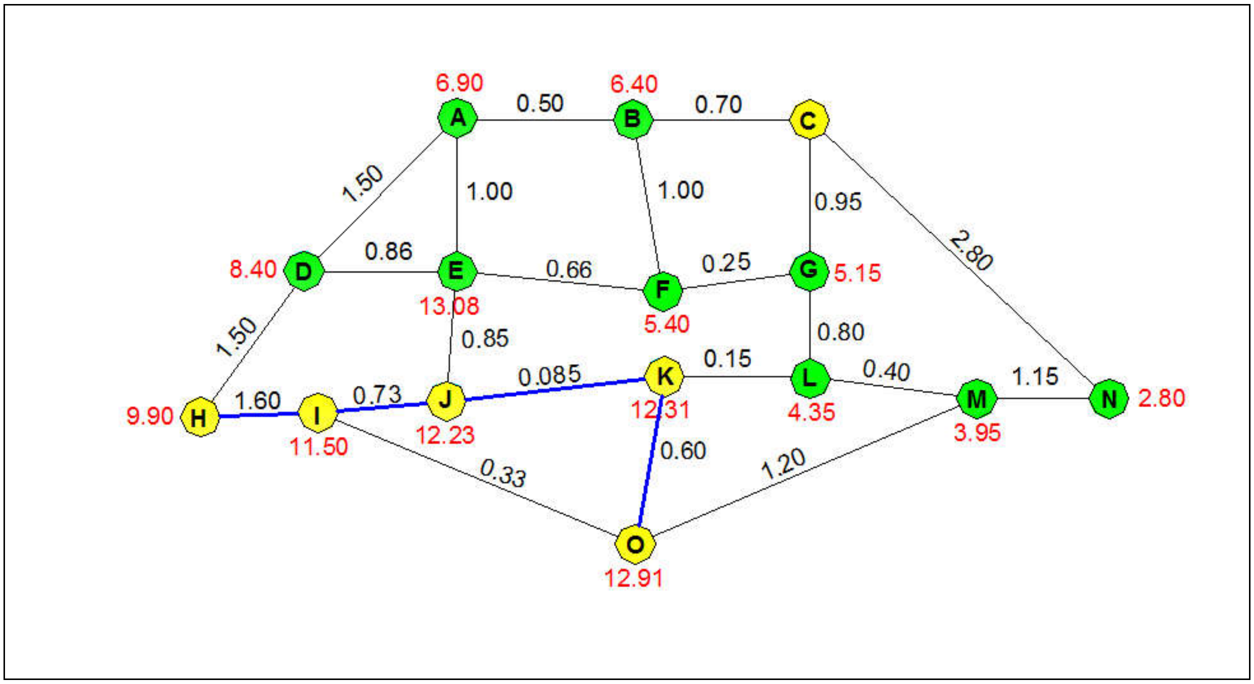
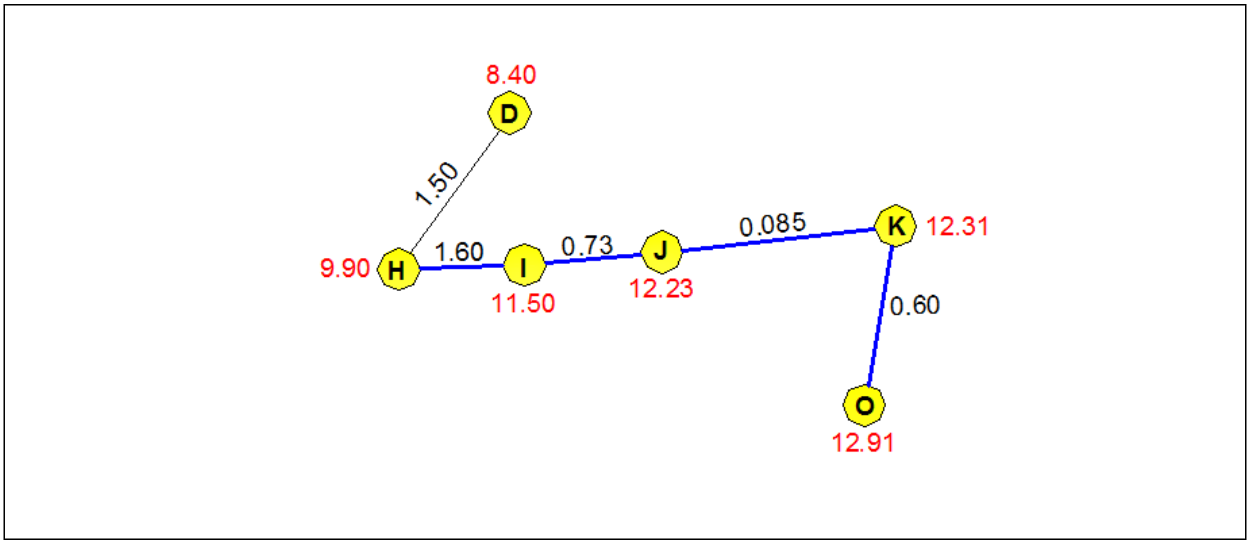




*Figura 4.6.17. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit H zbresim distancën e kulmit fqinjë.

$$9.90-1.50=8.40\surd$$



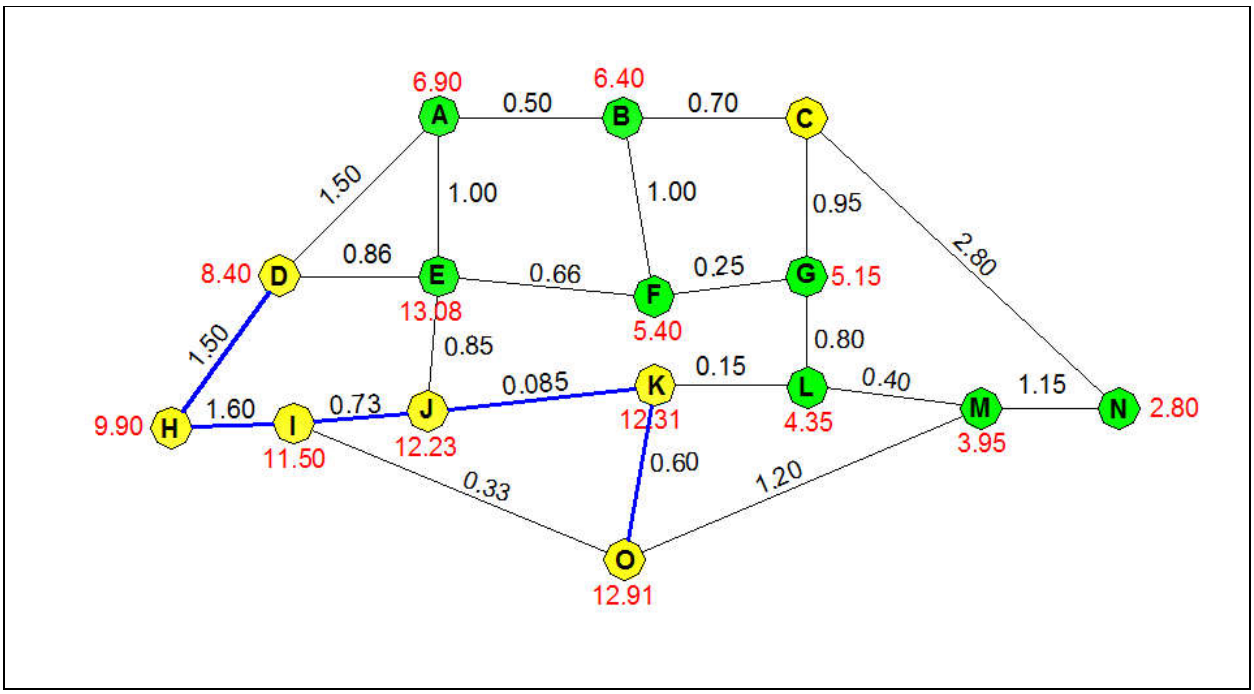
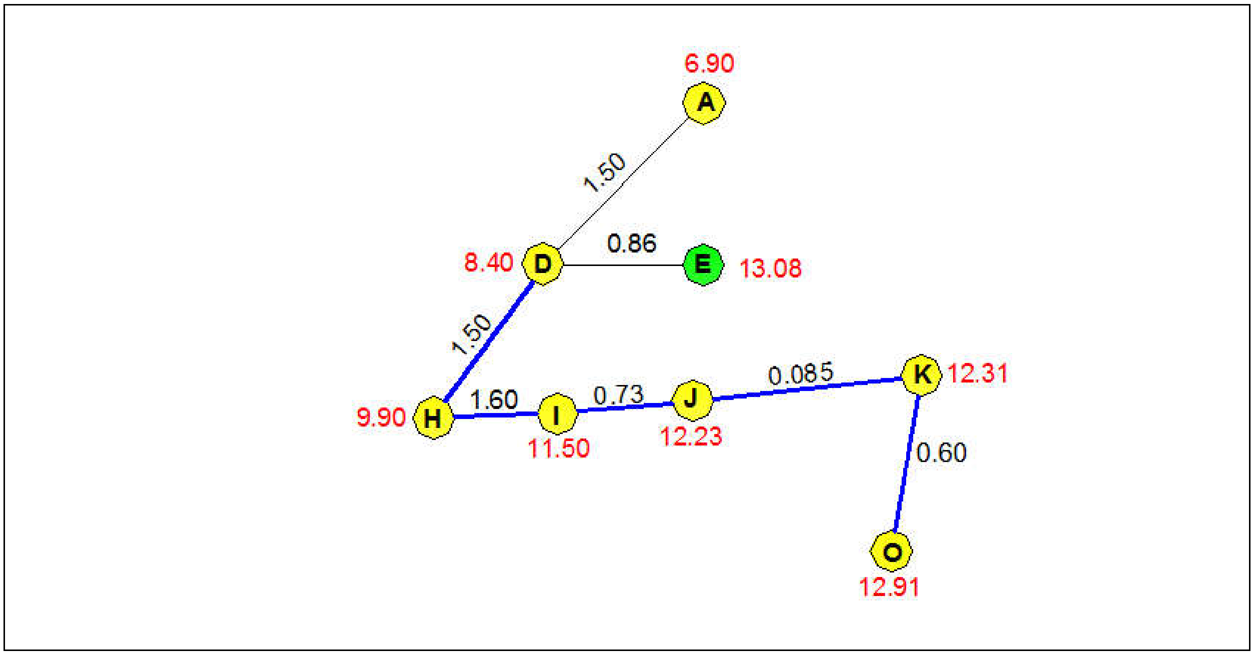




*Figura 4.6.18. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit D zbresim distancën e kulmeve fqinje.

8.40-1.50=6.90√

8.40-0.86≠13.08



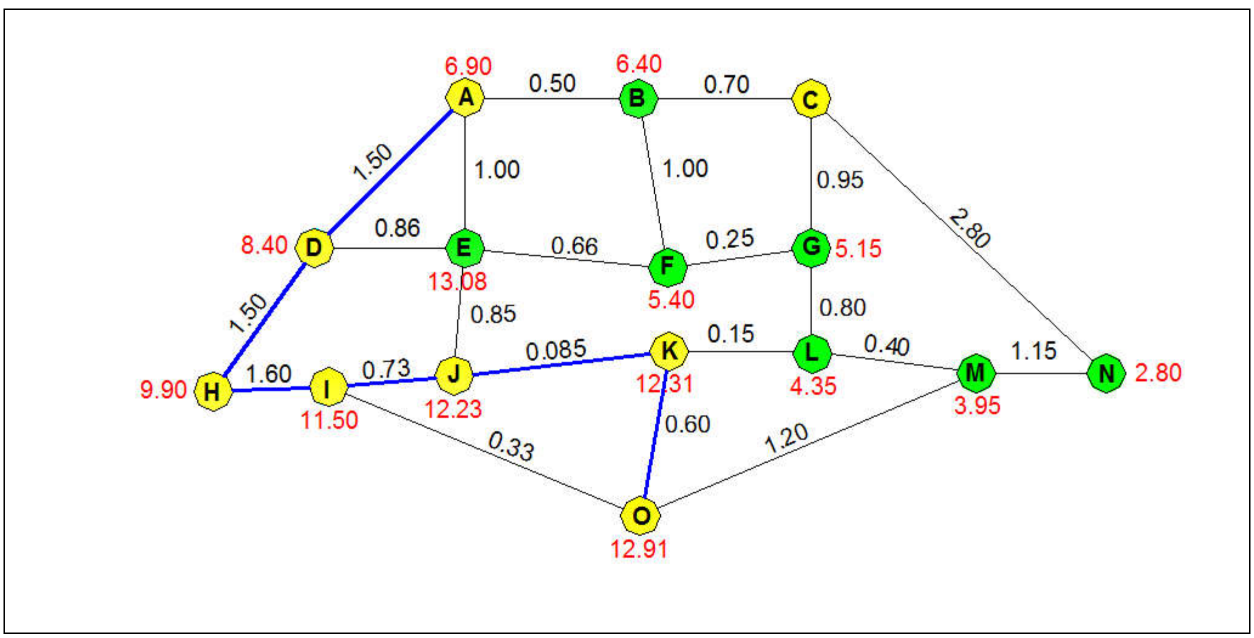
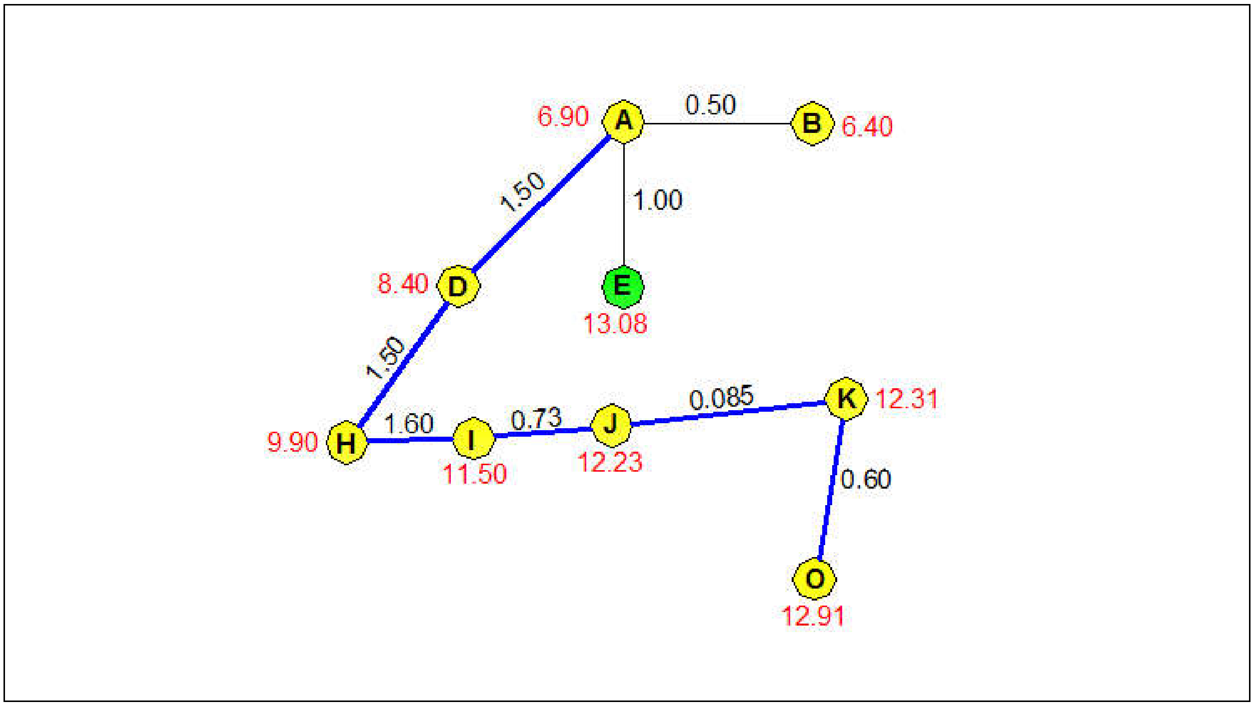




*Figura 4.6.19. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit A zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$6.90-0.50=6.40\surd$$

$$6.90-1.00\neq13.08$$



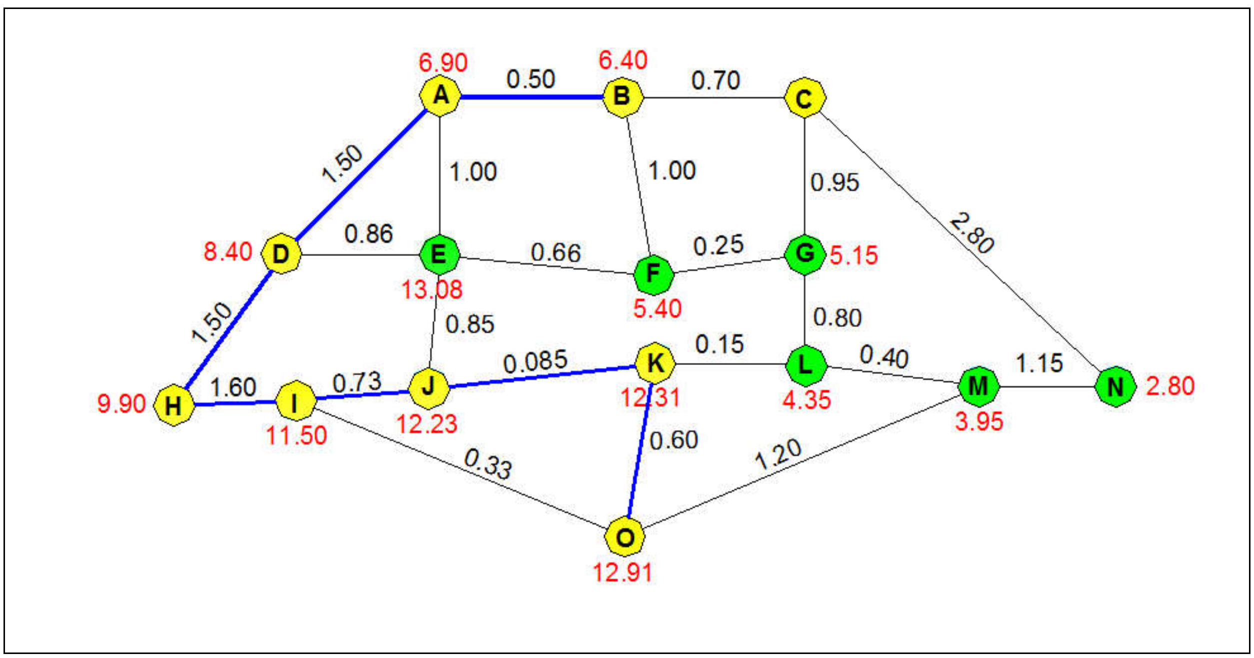
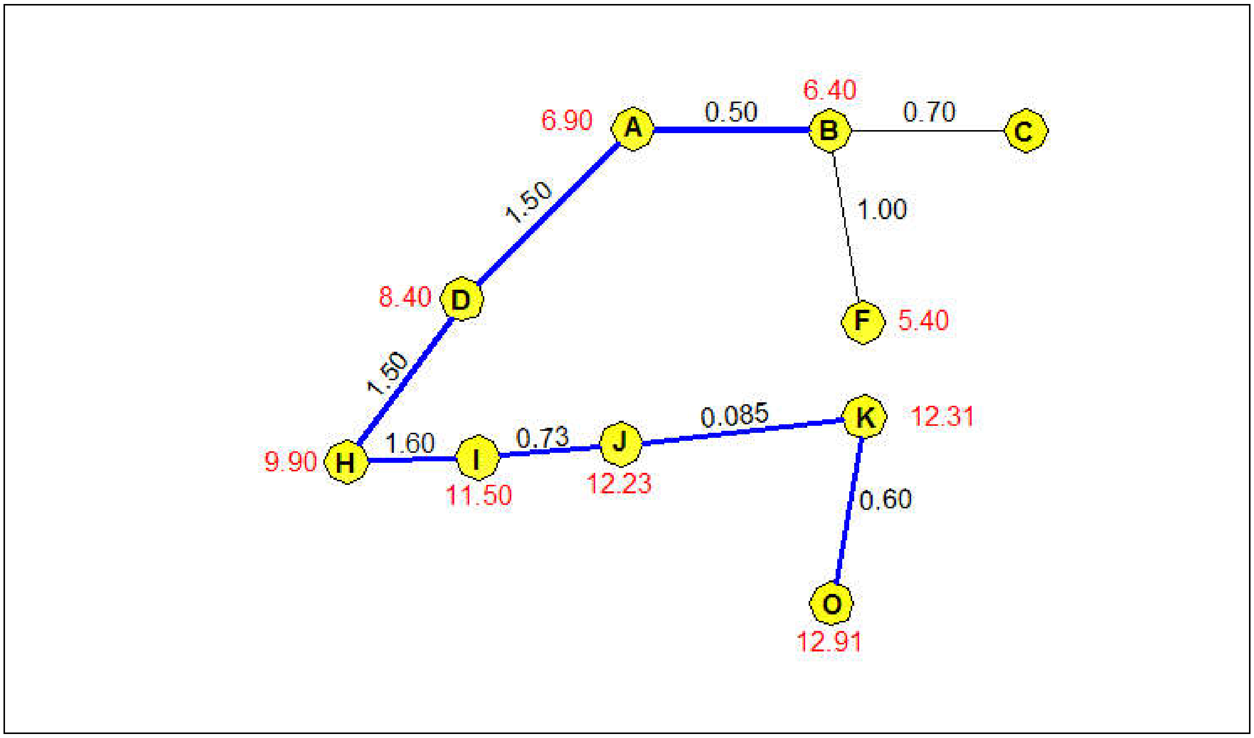




*Figura 4.6.20. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit B zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$6.40-0.70\neq 0.00$$

$$6.40-1.00=5.40\surd$$



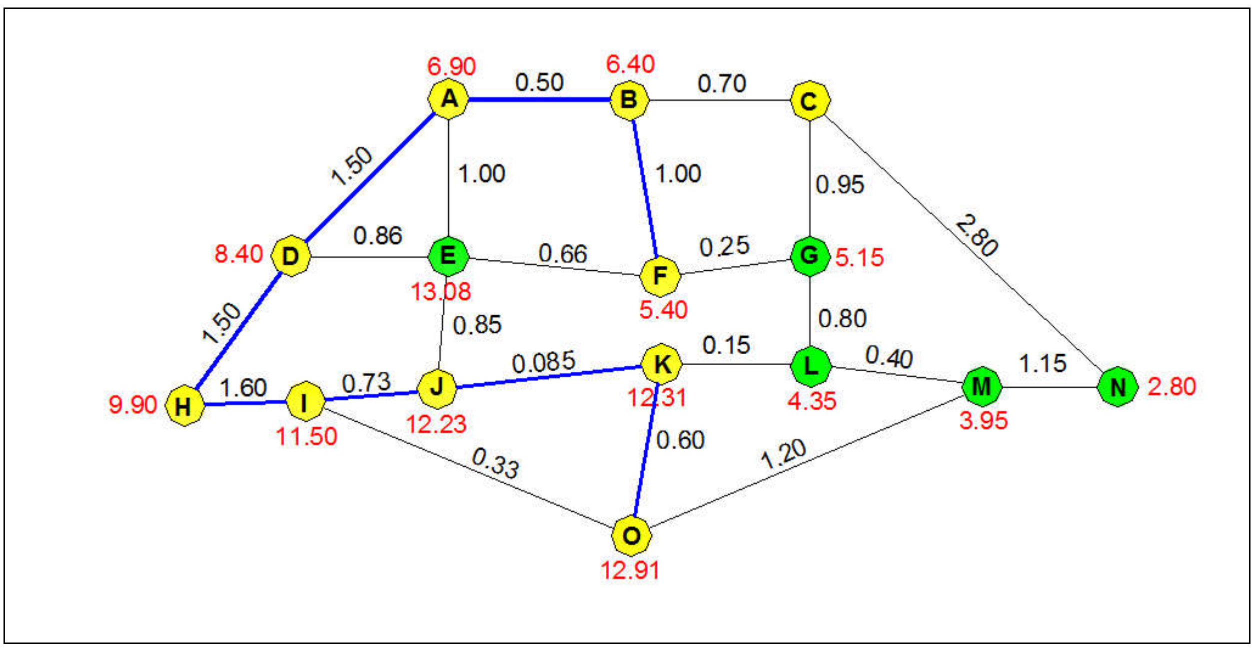
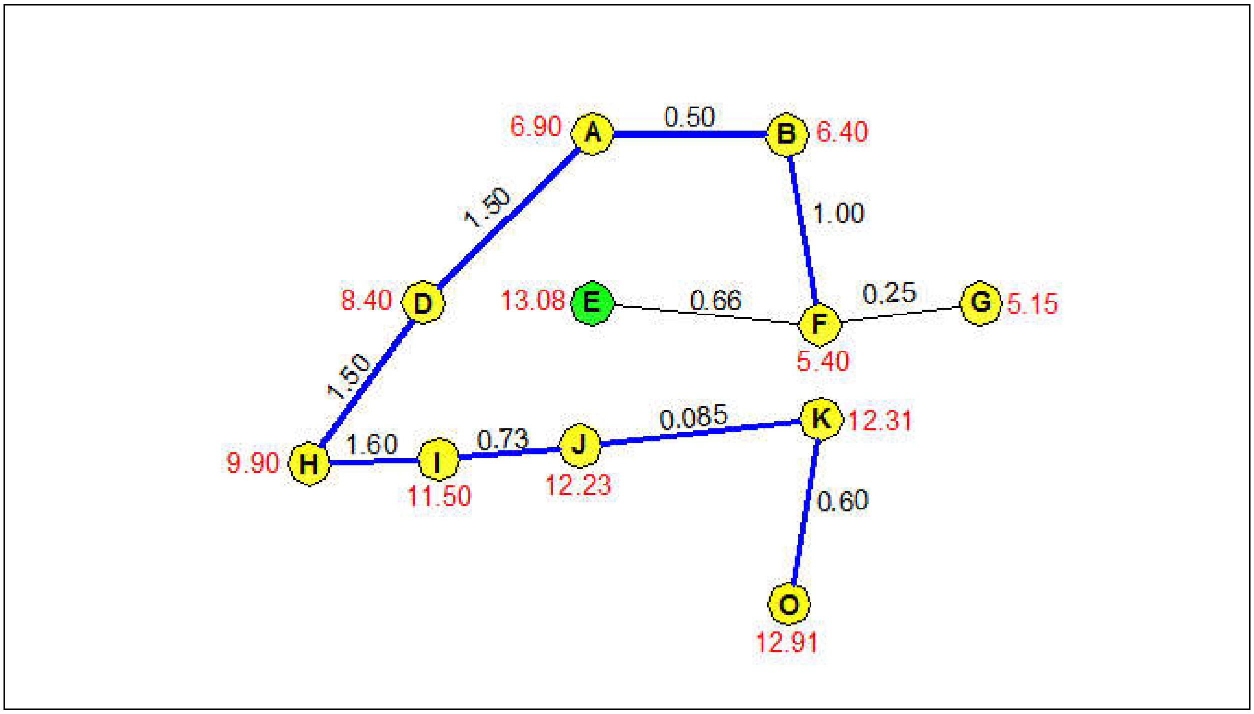




*Figura 4.6.21. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit F zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$5.40-0.66 \neq 13.08$$

$$5.40-0.25=5.15\surd$$



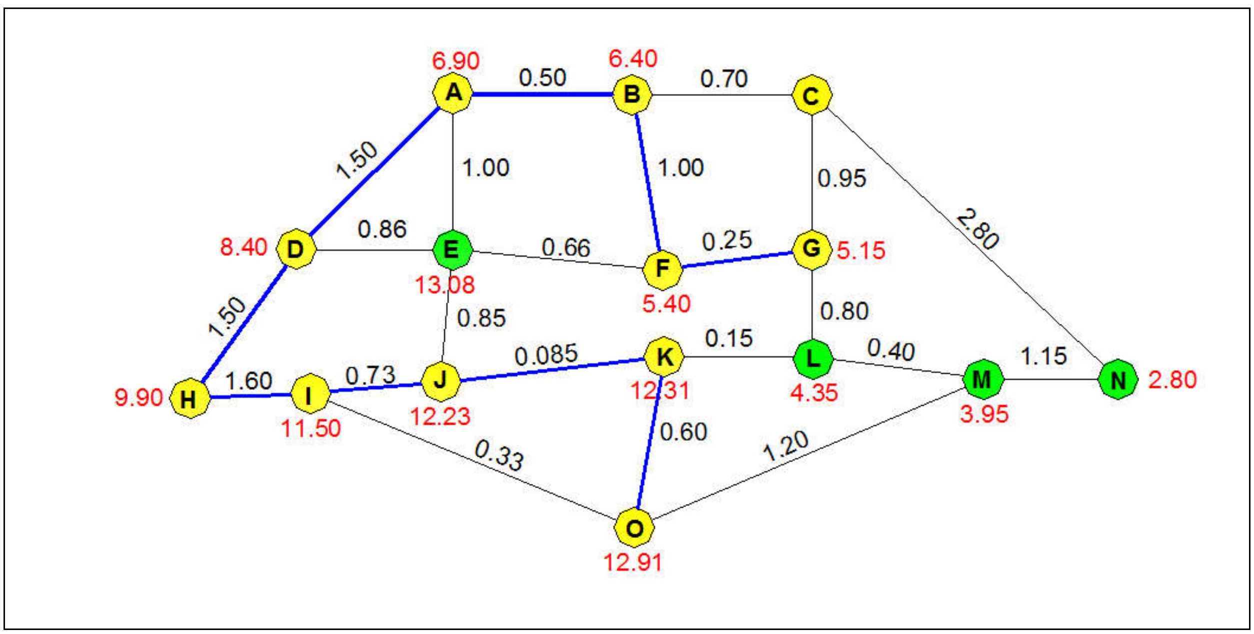




*Figura 4.6.22. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit G zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$5.15-0.95\neq 0.00$$

$$5.15-0.80=4.35\surd$$

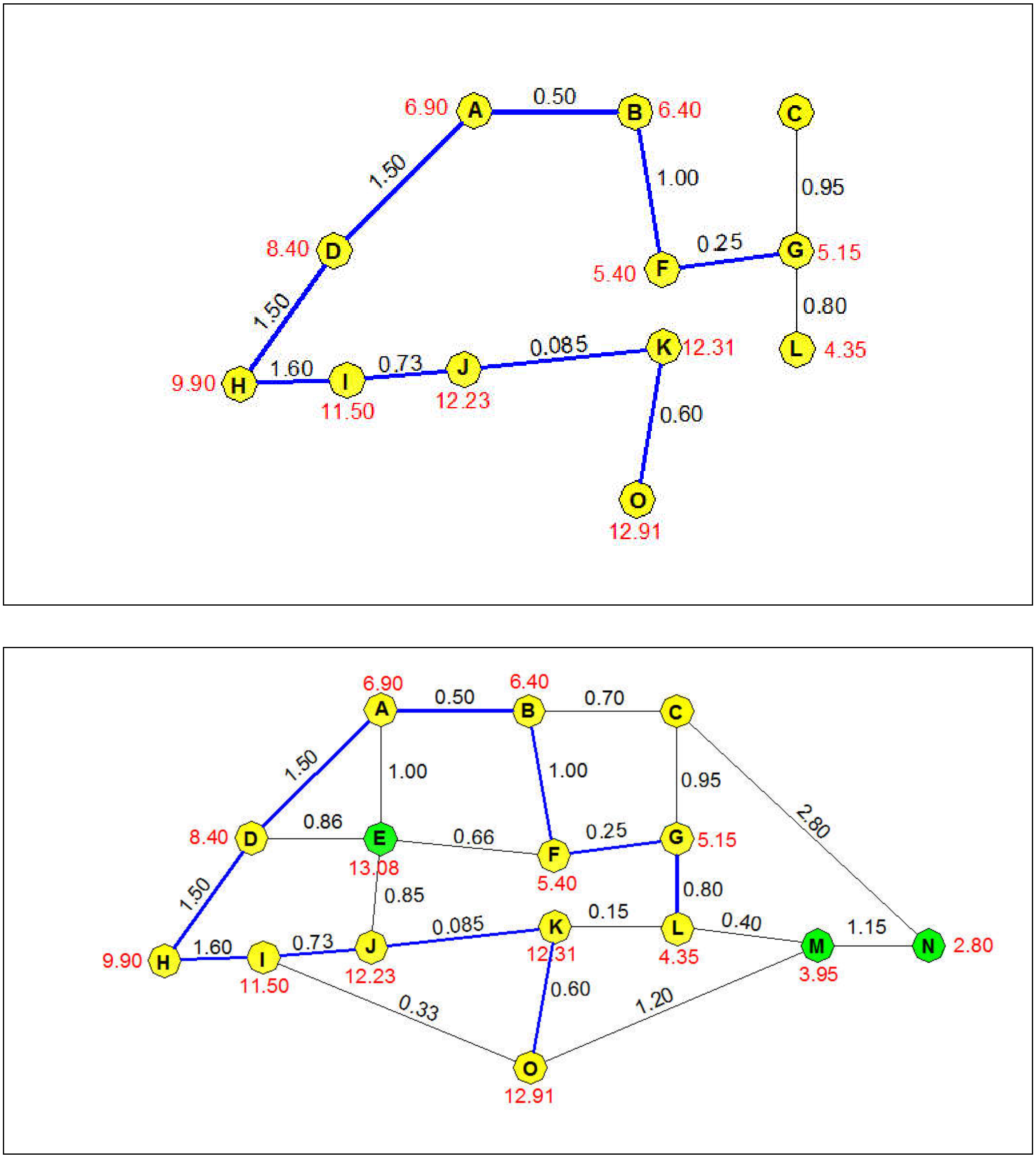



*Figura 4.6.23. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmit fqinjë.

$$4.35-0.40=3.95\surd$$

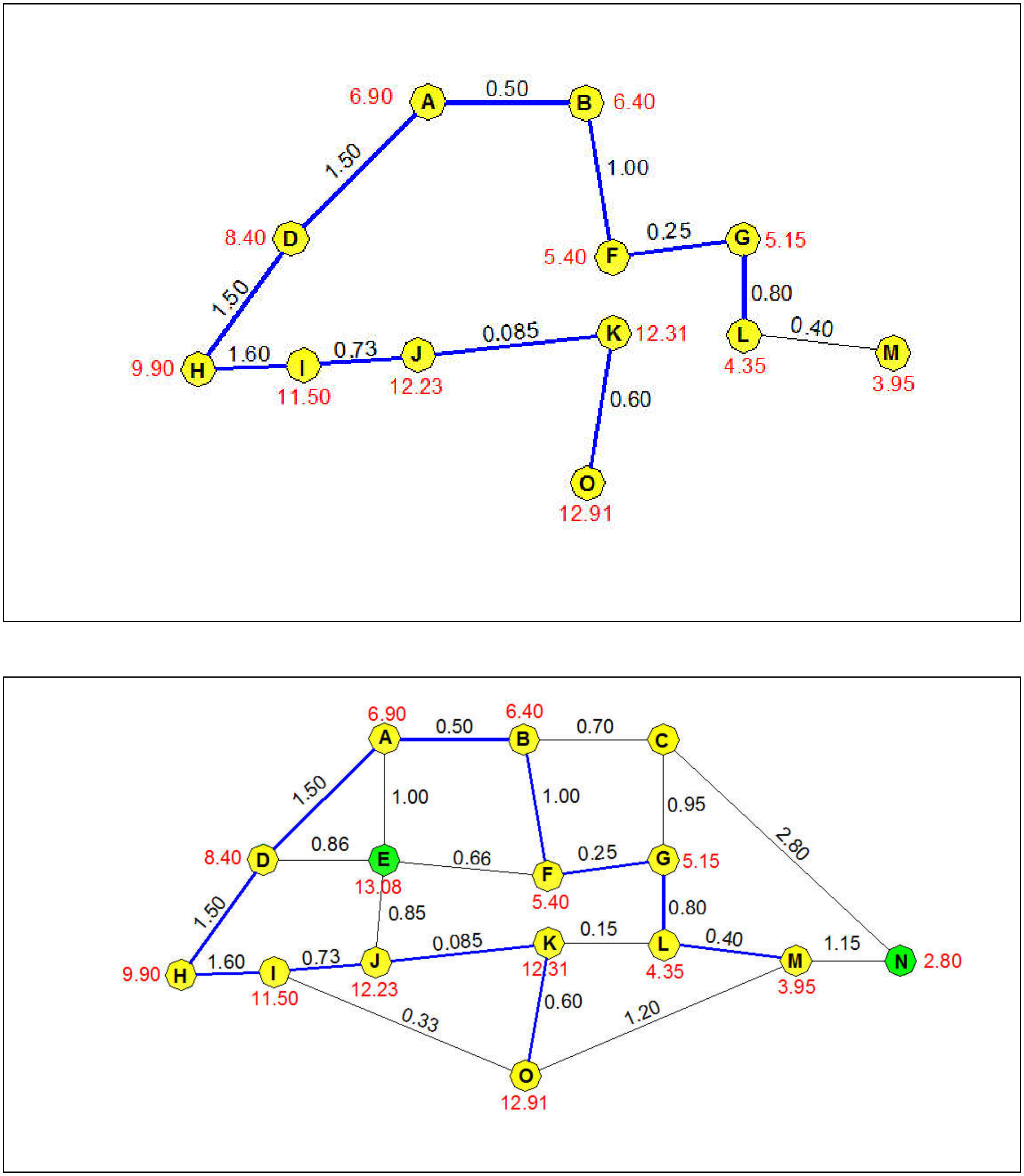



*Figura 4.6.24. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit M zbresim distancën e kulmit fqinjë.

$$3.95-1.15=2.80\surd$$

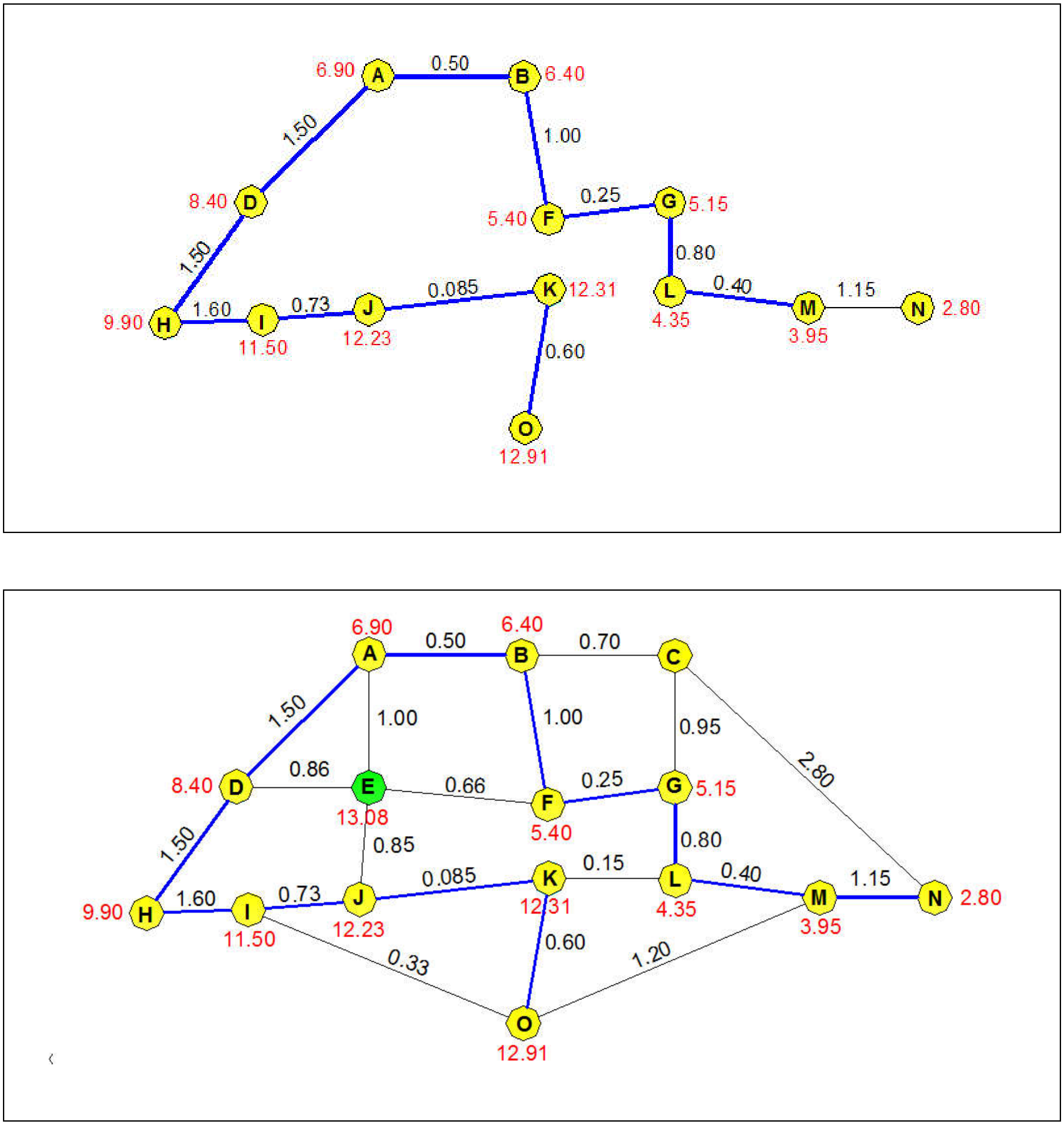



*Figura 4.6.25. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Pastaj prej kulmit N zbresim distancën e kulmit fqinjë.

2.80-2.80=0.00√

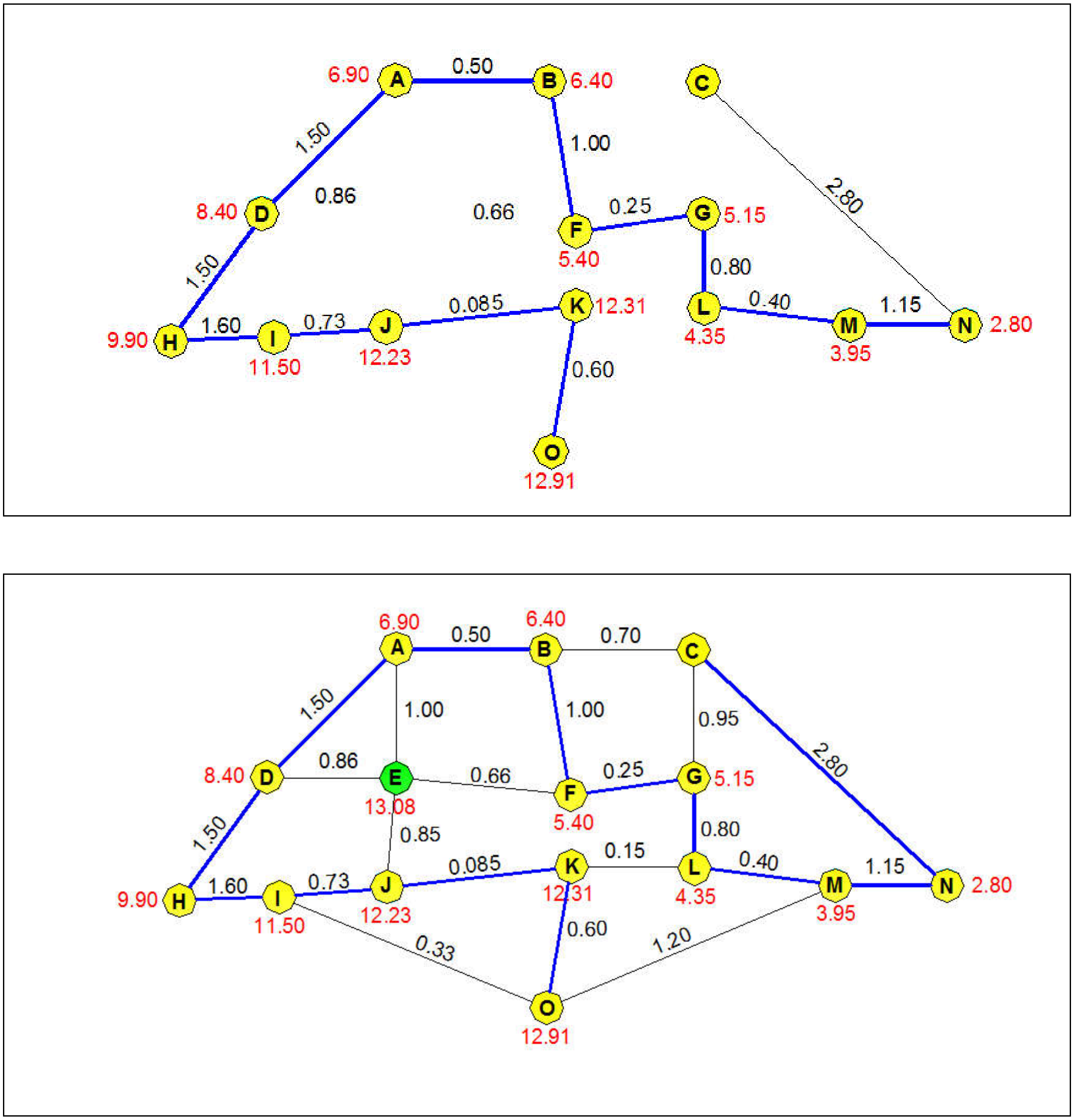



*Figura 4.6.26. Llogaritja e rrugës më të gjatë C-O.*

Rruga me gjatësinë më të gjatë është rruga C-N-M-L-G-F-B-A-D-H-I-J-K-O me gjatësi 12.91[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e gjatë prej kulmit C-O e paraqitur në hartë.

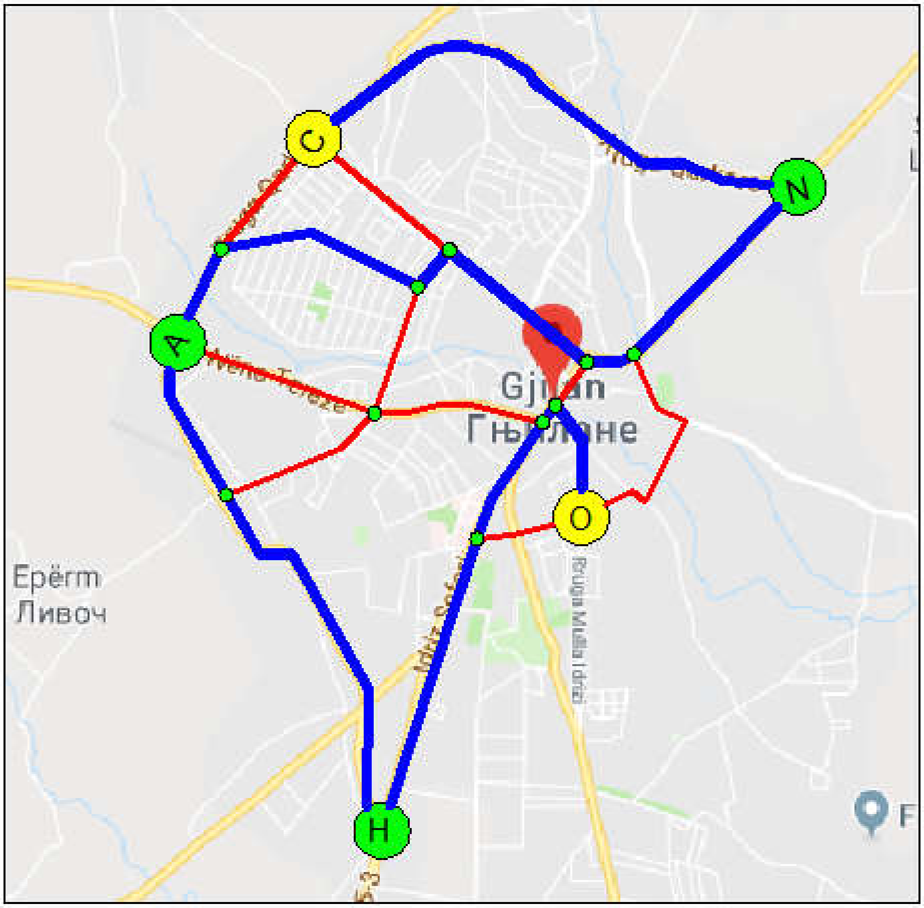



*Figura 4.6.27. Rruga më e gjatë C-O e paraqitur në hartë.*

## 4.7. RRUGA MË E GJATË PREJ KULMIT H NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MAKSIMALE

Së pari fillojmë nga kulmi H duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi H në kulmet (D dhe I).

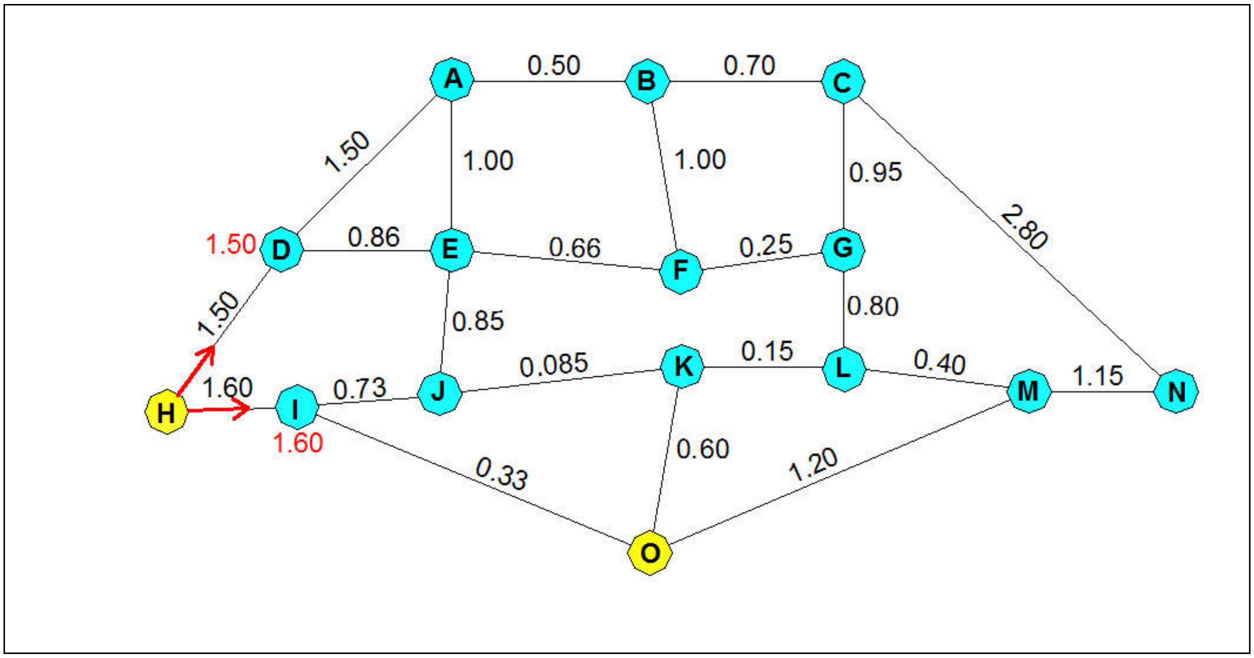



*Figura 4.7.0. Rruga më e gjatë H-O.*

Distanca më e gjatë prej kulmit H në kulmet fqinjë (D dhe I) është 1.60.

Pastaj kulmin I me distancën 1.60 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 1.60.

Secilit kulm fqinjë (kulmit J dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

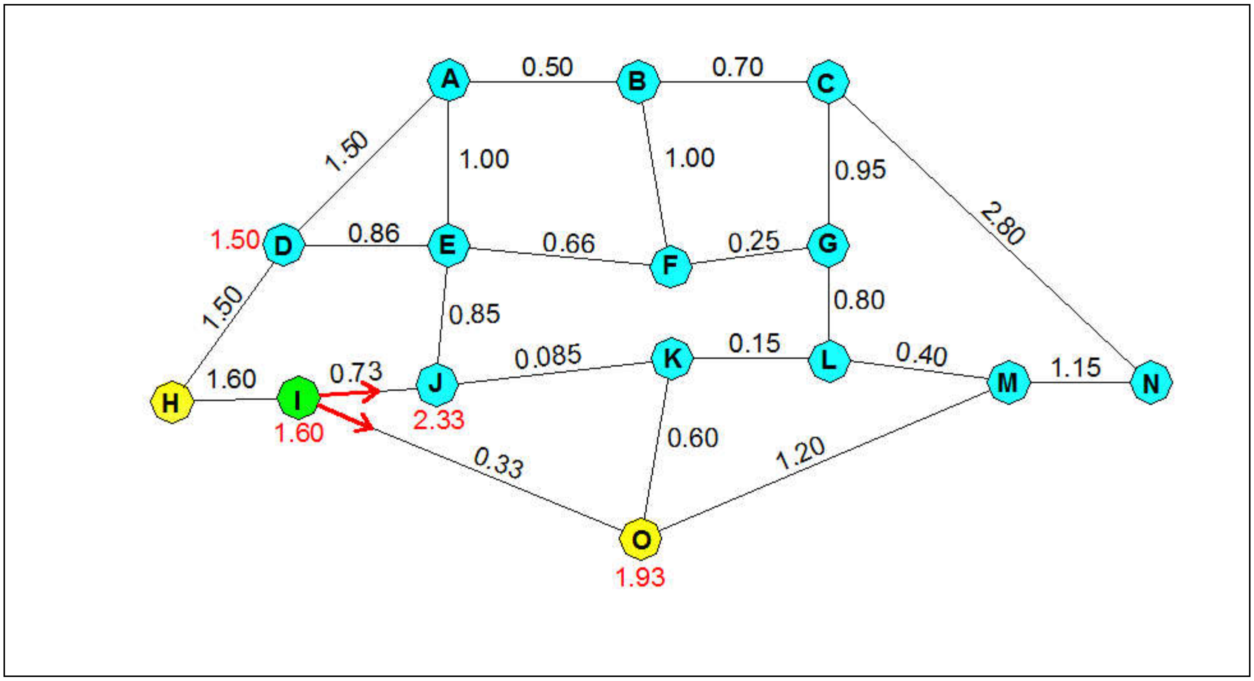



*Figura 4.7.1. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të gjatë e cila është 2.33.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 2.33.

Secilit kulm fqinjë (kulmit E dhe K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

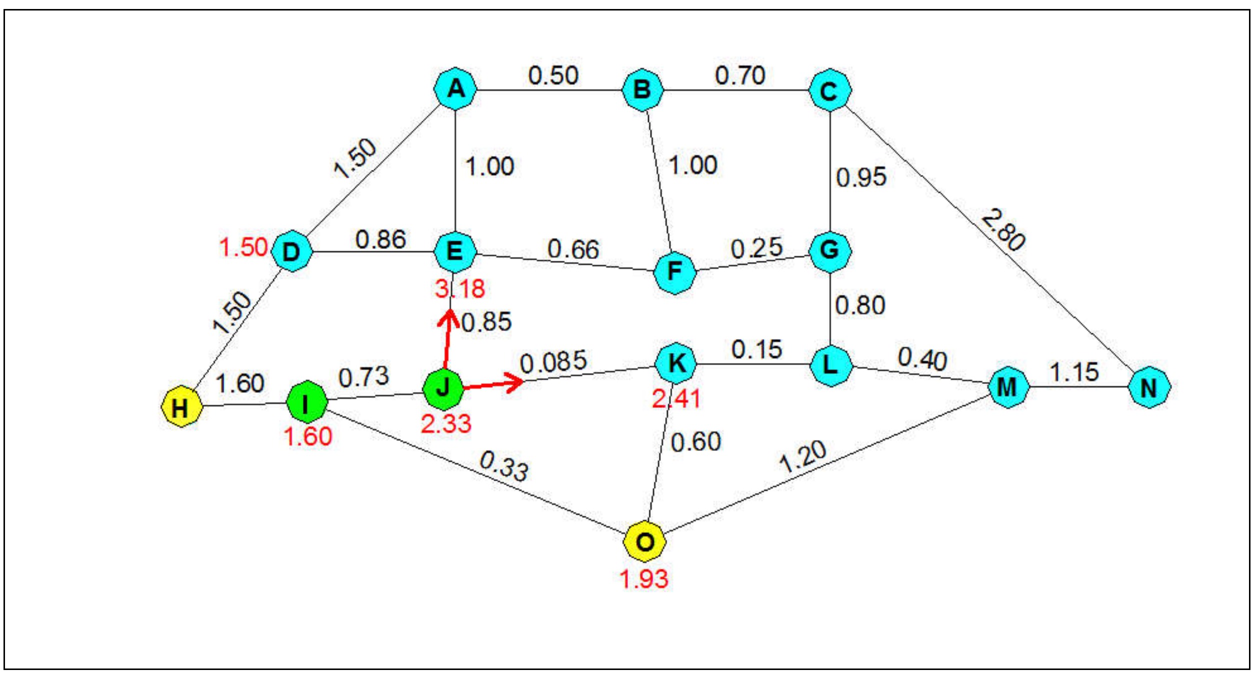



*Figura 4.7.2. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të gjatë e cila është 3.18.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 3.18

Secilit kulm fqinjë ( kulmit A,D dhe F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi E në kulmin D është më e gjatë, 4.04>1.50, atëherë e eleminojmë distancën 1.50.

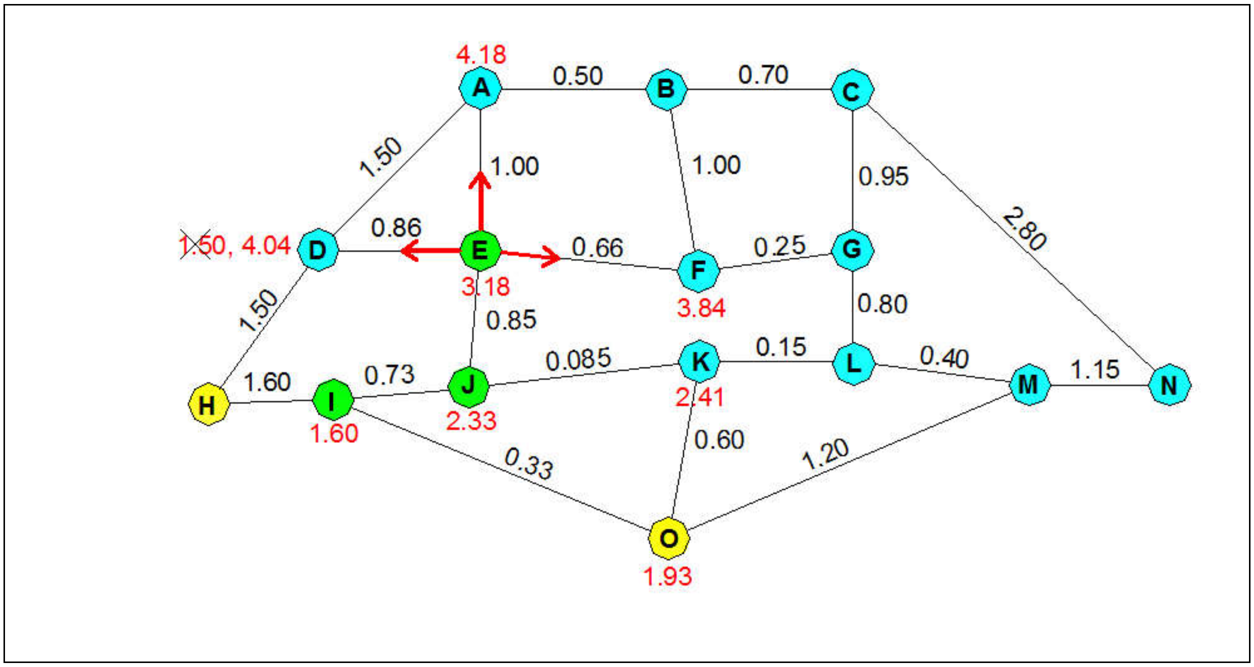



*Figura 4.7.3. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin A me distancën më të gjatë e cila është 4.18.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit A me distancë 4.18

Secilit kulm fqinjë ( kulmit B dhe D) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi A në kulmin D është më e gjatë, 5.68>4.04, atëherë e eleminojmë distancën 4.04.

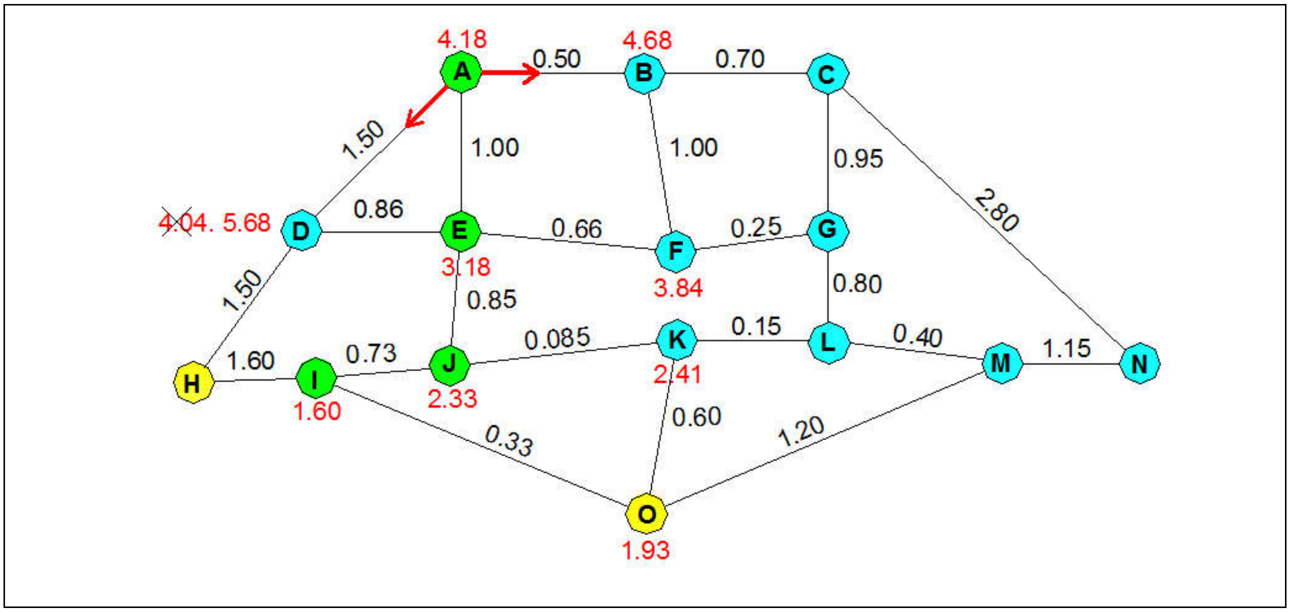



*Figura 4.7.4. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin B me distancën më të gjatë e cila është 4.68.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 4.68

Secilit kulm fqinjë ( kulmit C dhe F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi B në kulmin F është më e gjatë, 5.68>3.84, atëherë e eleminojmë distancën 3.84.

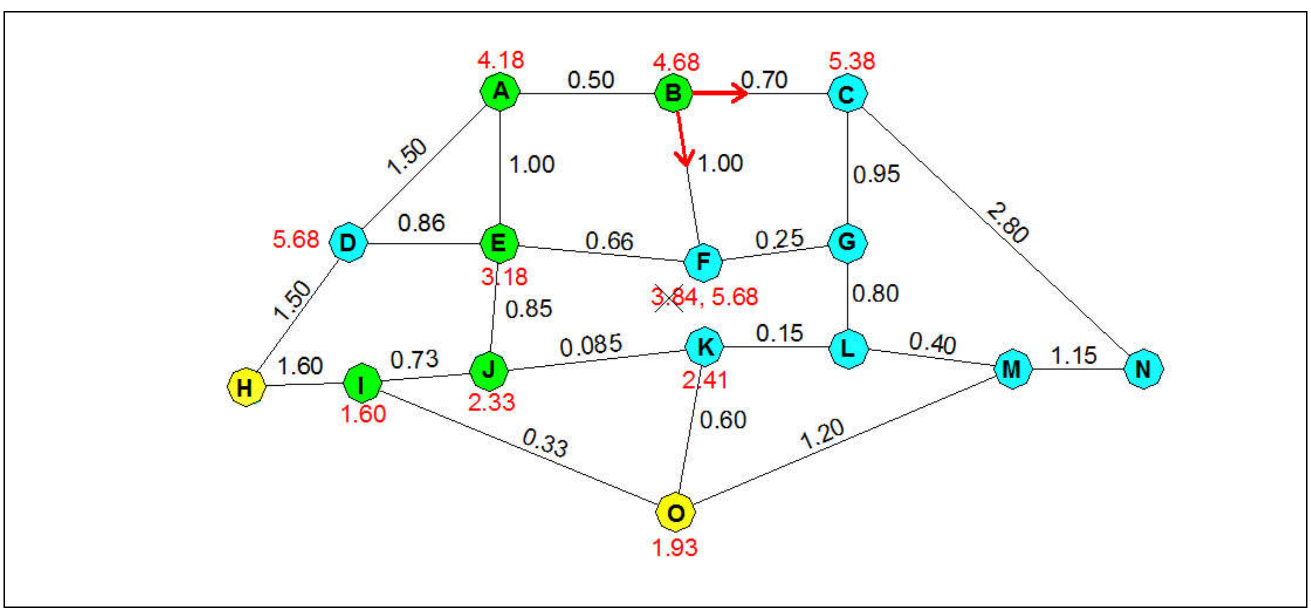



*Figura 4.7.5. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin F me distancën më të gjatë e cila është 5.68.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit F me distancë 5.68

Kulmit fqinjë ( kulmit G) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

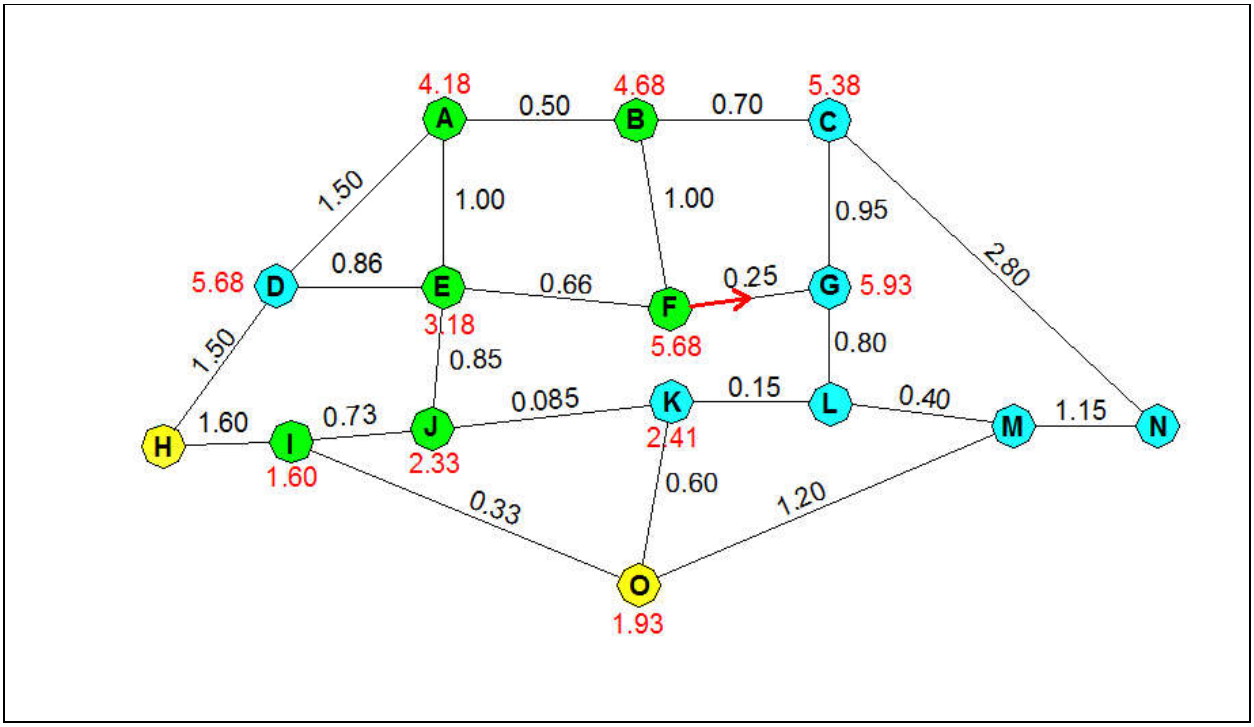



*Figura 4.7.6. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të gjatë e cila është 5.93.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 5.93.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit C dhe L) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi G në kulmin C është më e gjatë, 6.88>5.38, atëherë e eleminojmë distancën 5.38.

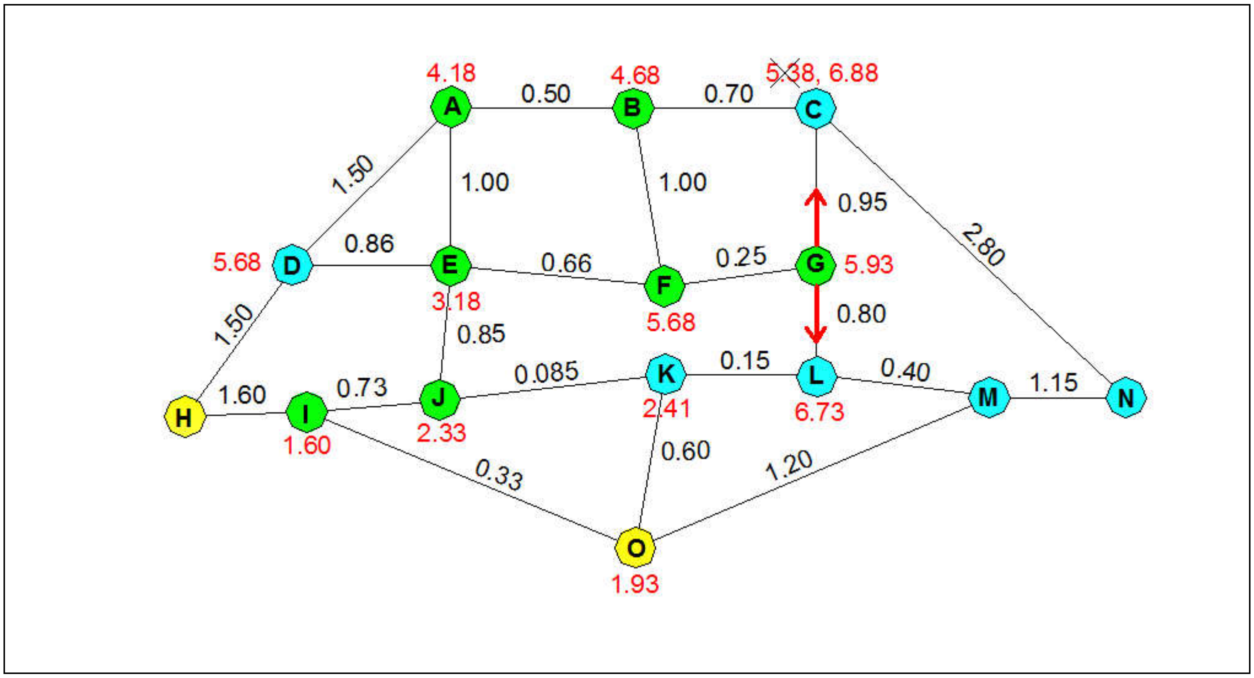



*Figura 4.7.7. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin C me distancën më të gjatë e cila është 6.88.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit C me distancë 6.88.

Kulmit fqinjë ( kulmit N) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

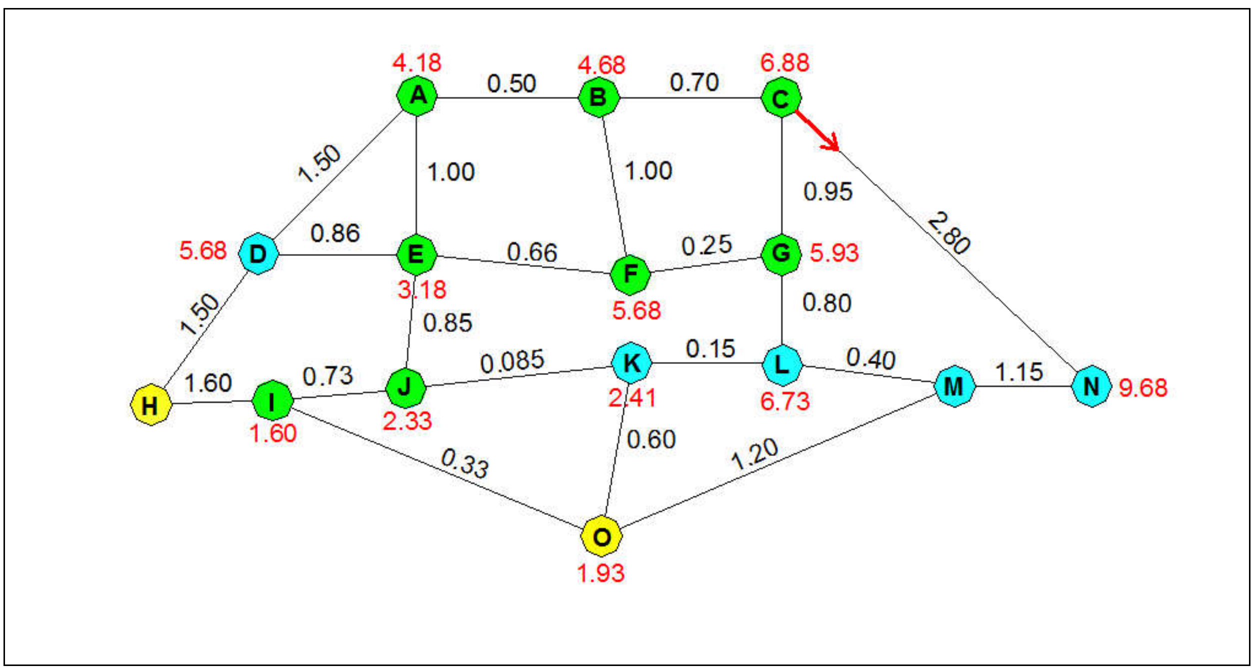



*Figura 4.7.8. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin N me distancën më të gjatë e cila është 9.68.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit N me distancë 9.68.

Kulmit fqinjë ( kulmit N) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

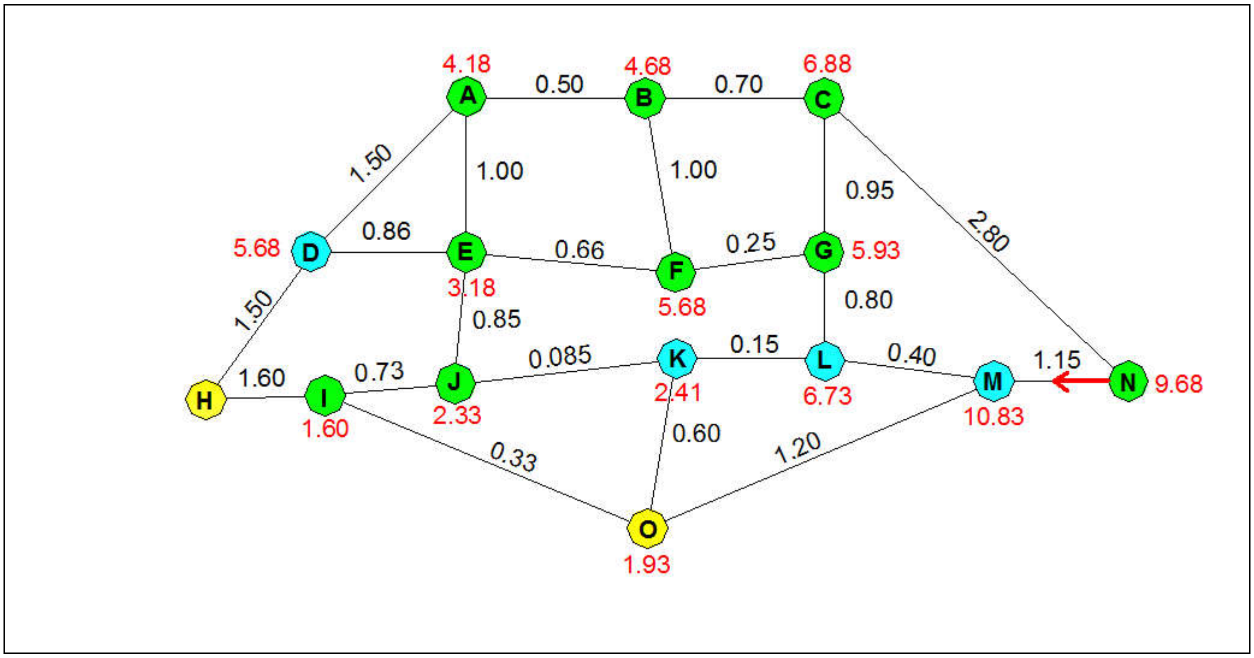



*Figura 4.7.9. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të gjatë e cila është 10.83.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 10.83.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit L dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi M në kulmin L është më e gjatë, 11.23>6.73, atëherë e eleminojmë distancën 6.73.

Gjithashtu edhe distanca nga kulmi M në kulmin O është më e gjatë, 12.03>1.93, atëherë e eleminojmë distancën 1.93

.

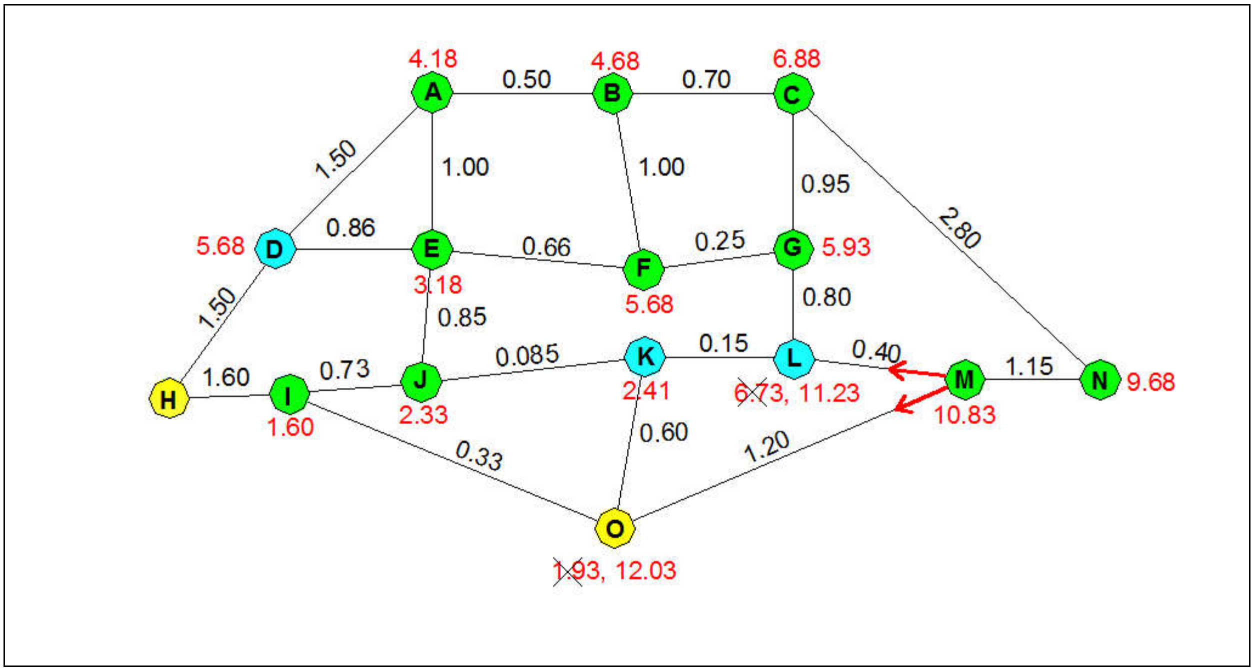



*Figura 4.7.10. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të gjatë e cila është 11.23.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 11.23.

Kulmit fqinjë ( kulmit K) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi L në kulmin K është më e gjatë, 11.38>2.41, atëherë e eleminojmë distancën 2.41.

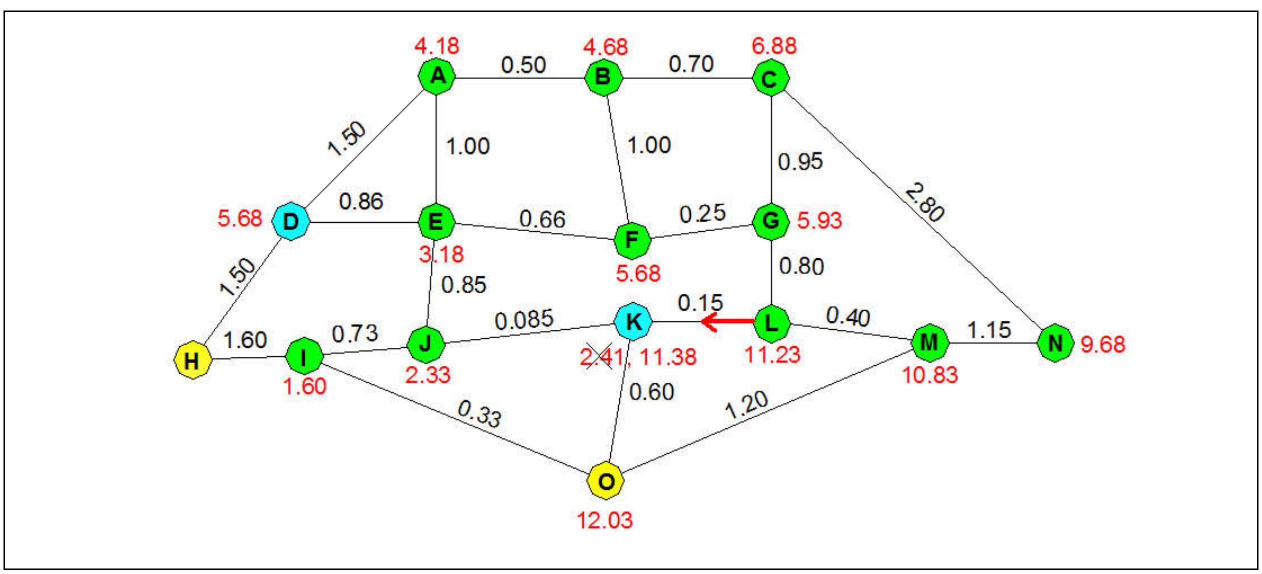



*Figura 4.7.11. Rruga më e gjatë H-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi H.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të gjatë e cila është 11.38.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 11.38.

Kulmit fqinjë ( kulmit O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi K në kulmin O është më e shkurtë, 11.98<12.03, prandaj mbetet distanca e mëparshme 12.03 dhe ajo 11.98 nuk merret parasysh.

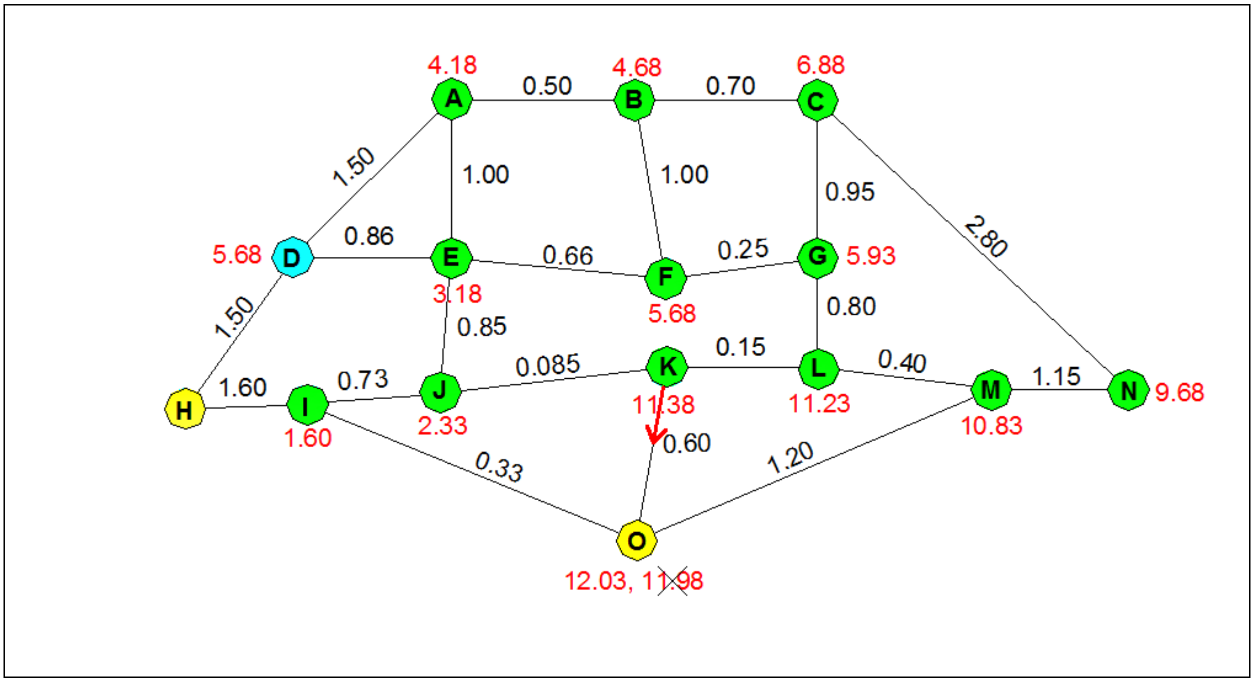



*Figura 4.7.12. Rruga më e gjatë H-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

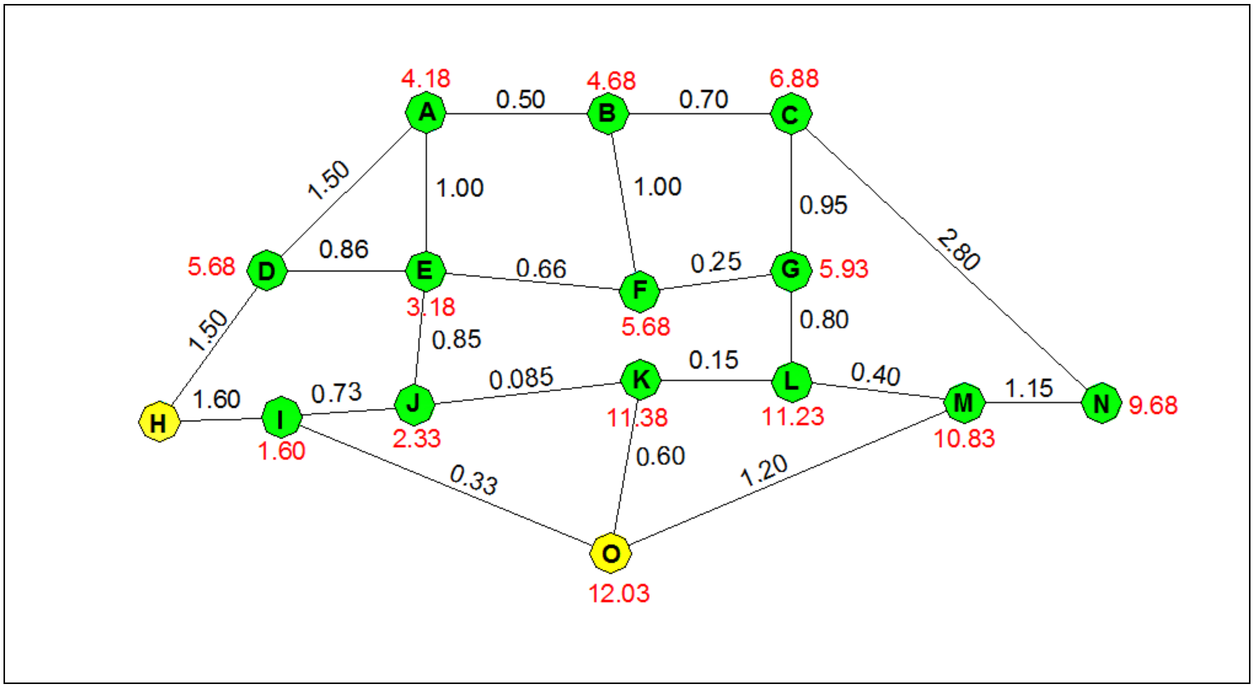



*Figura 4.7.13. Rruga më e gjatë H-O.*

**Llogaritja e rrugës maksimale H-O.**

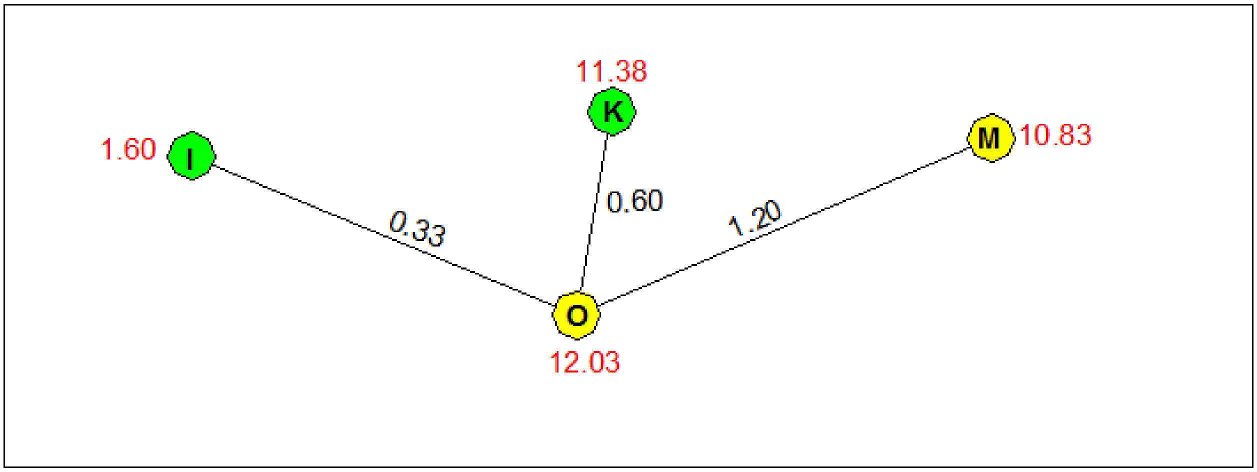
Tani mund të llogaritim rrugën maksimale prej kulmit H në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$12.03--0.33\neq 1.60$$

$$12.03-0.60\neq 11.38$$

$$12.03-1.20=10.83\surd$$



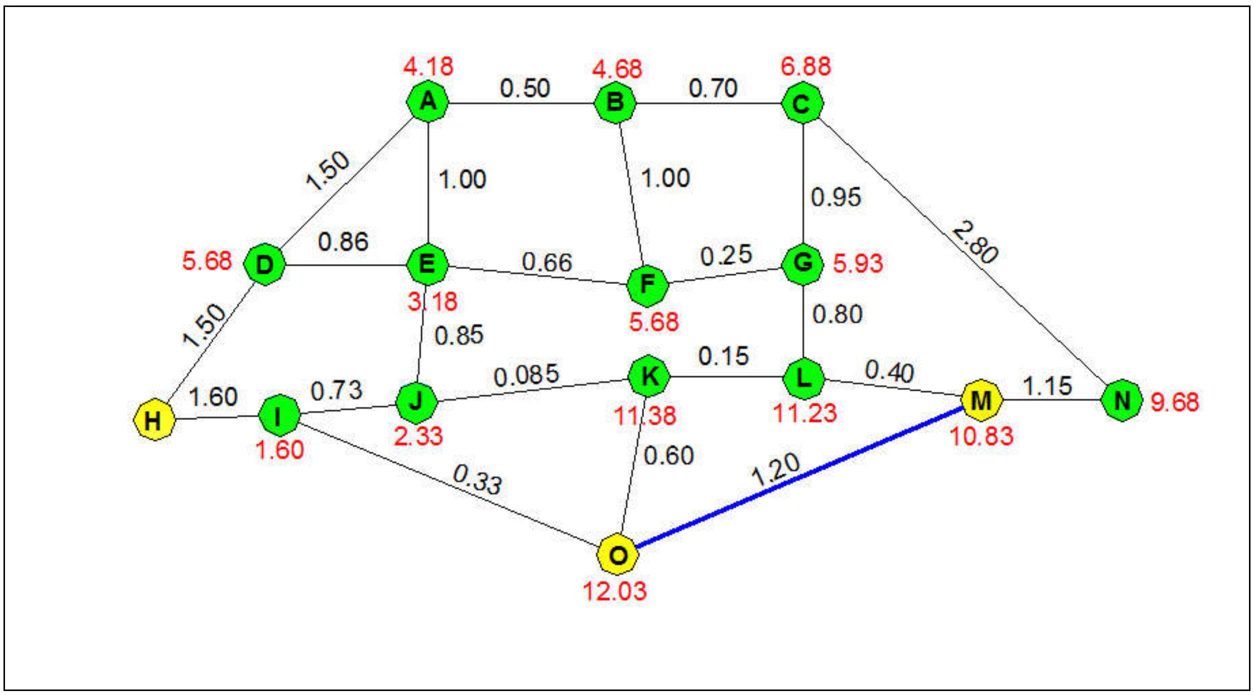
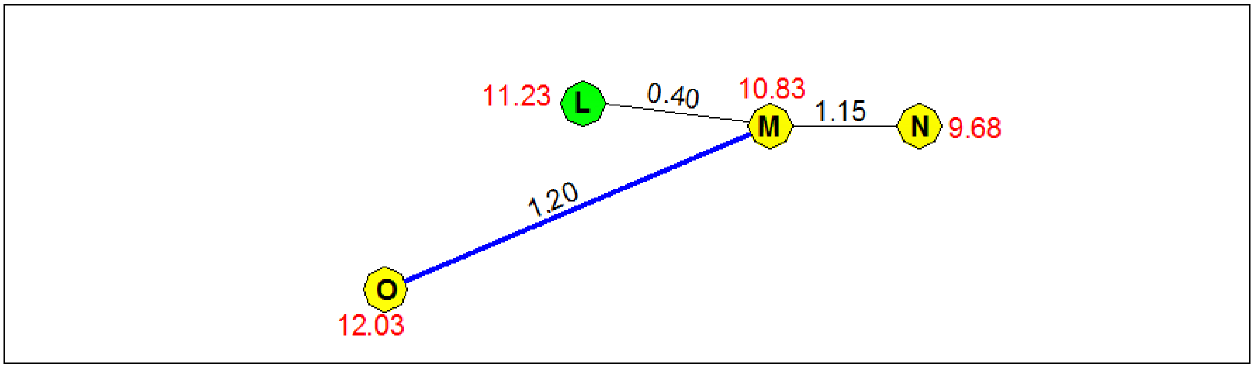




*Figura 4.7.14. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë.Tani prej kulmit M zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$10.83-0.40 \neq 11.23$$

$$10.83-1.15=9.68\surd$$



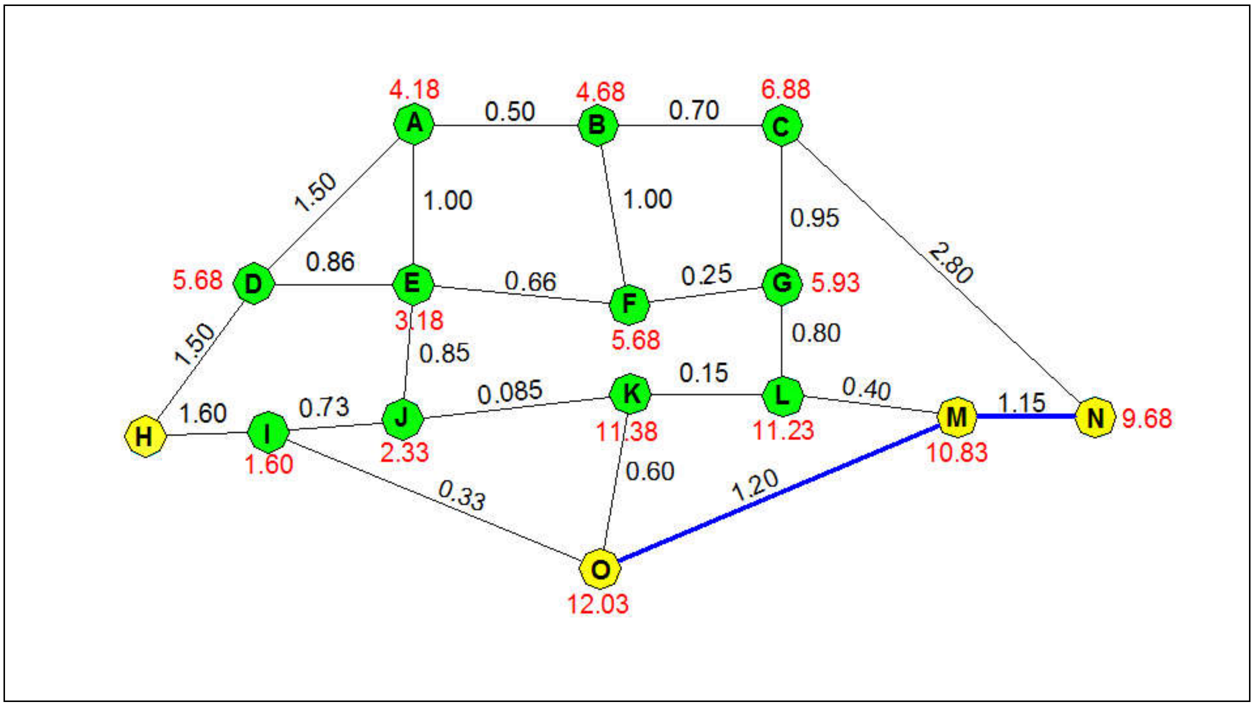




*Figura 4.7.15. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit N zbresim distancën e kulmit fqinjë.

9.68-2.80=6.88√

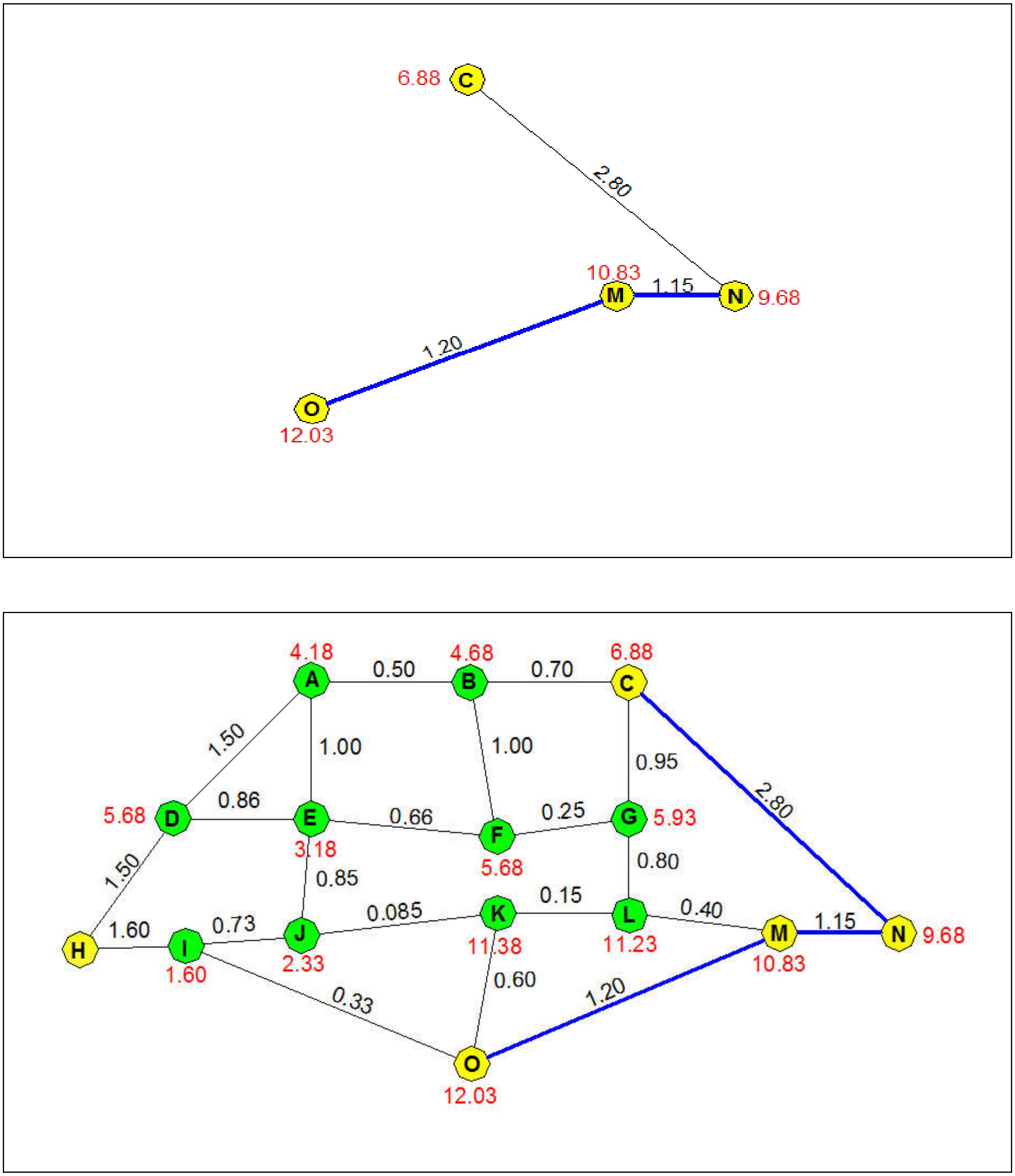
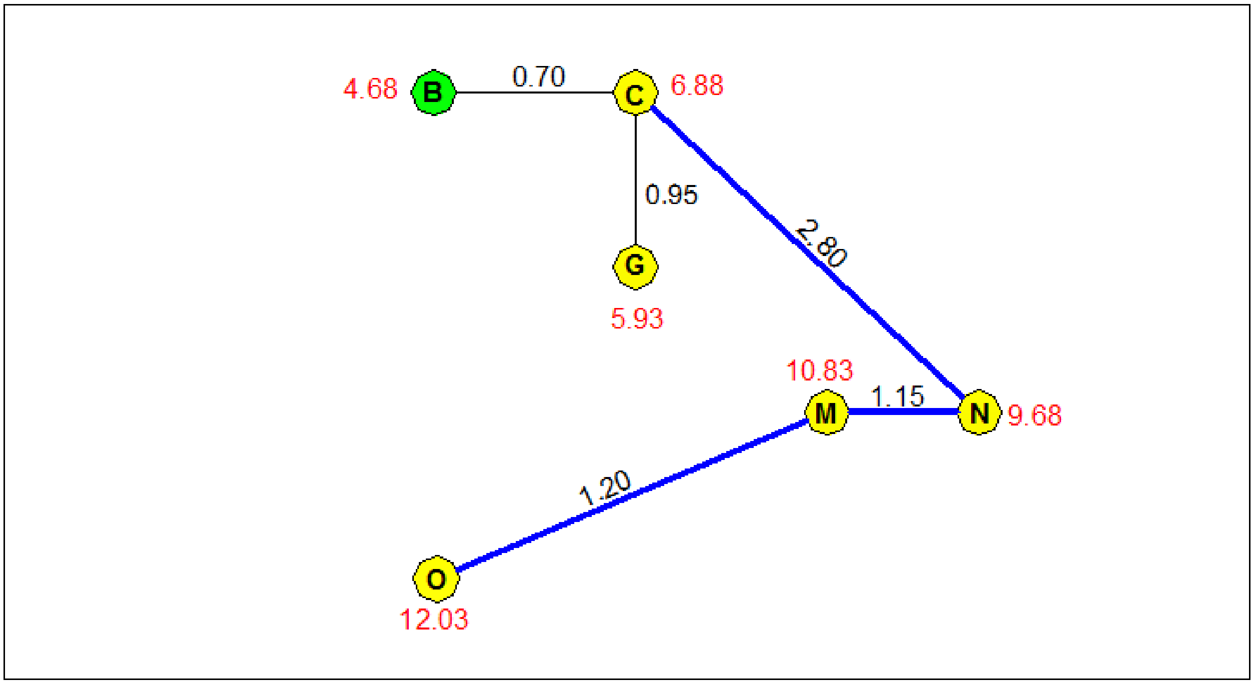



*Figura 4.7.16. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit C zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$6.88-0.70\neq4.68$$

$$6.88-0.95=5.93\surd$$



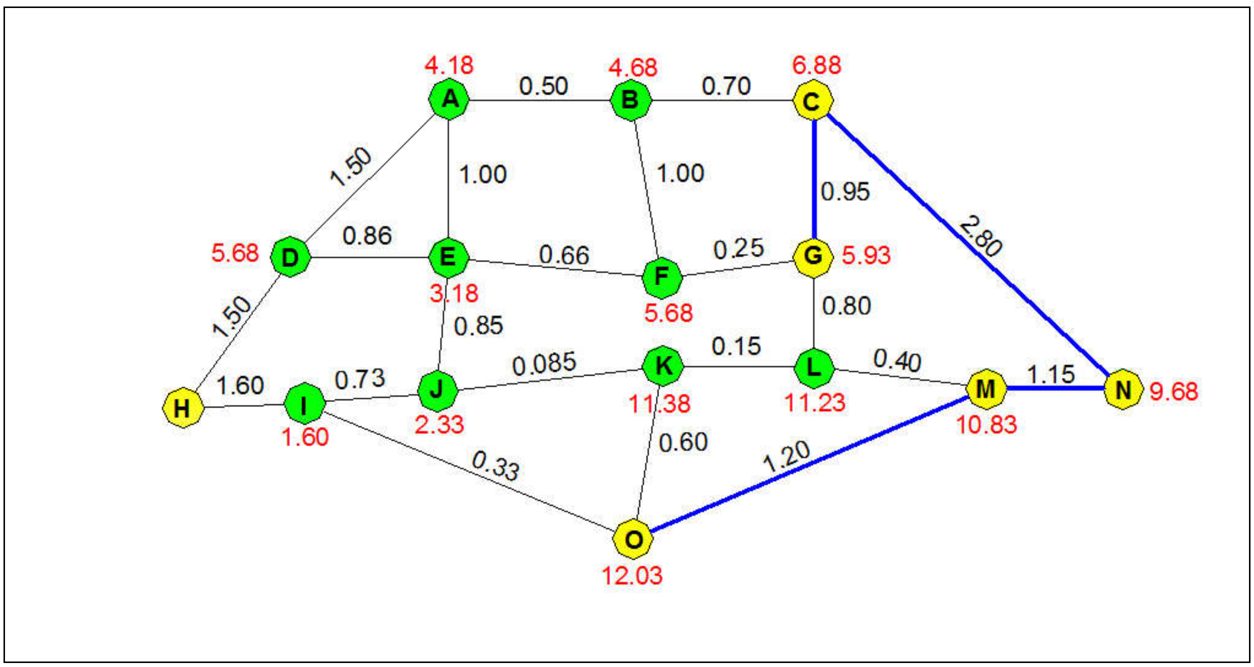
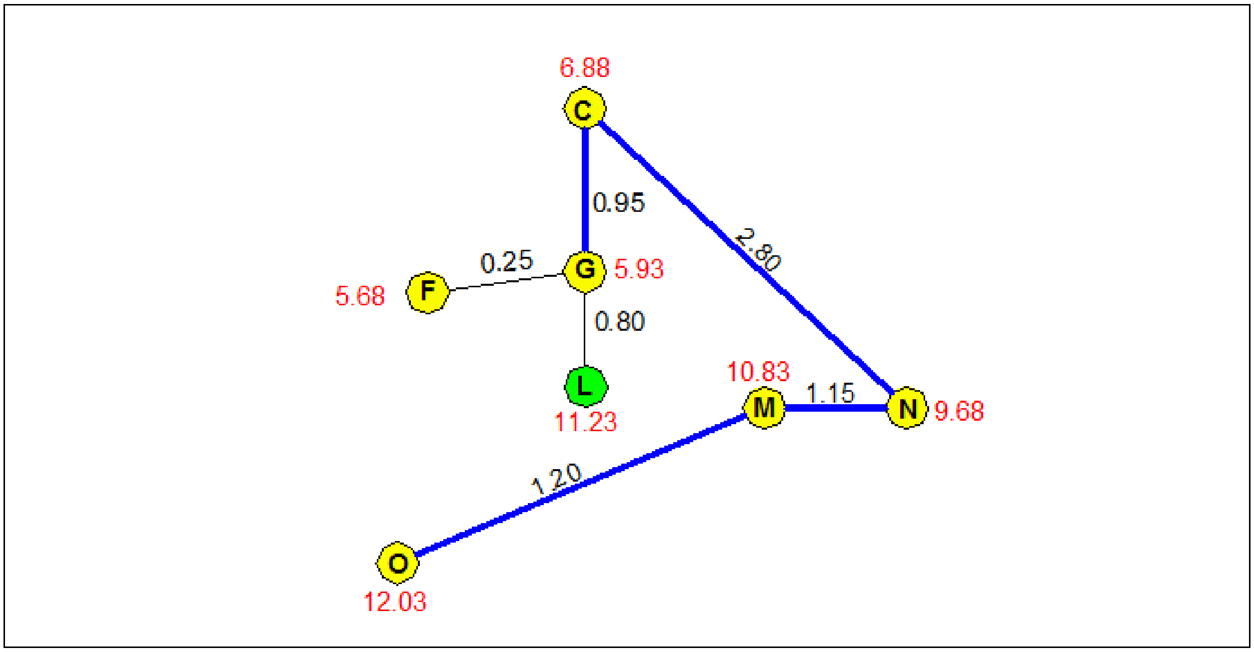




*Figura 4.7.17. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit G zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$5.93-0.25=5.68\surd$$

$$5.93-0.80\neq 11.23$$



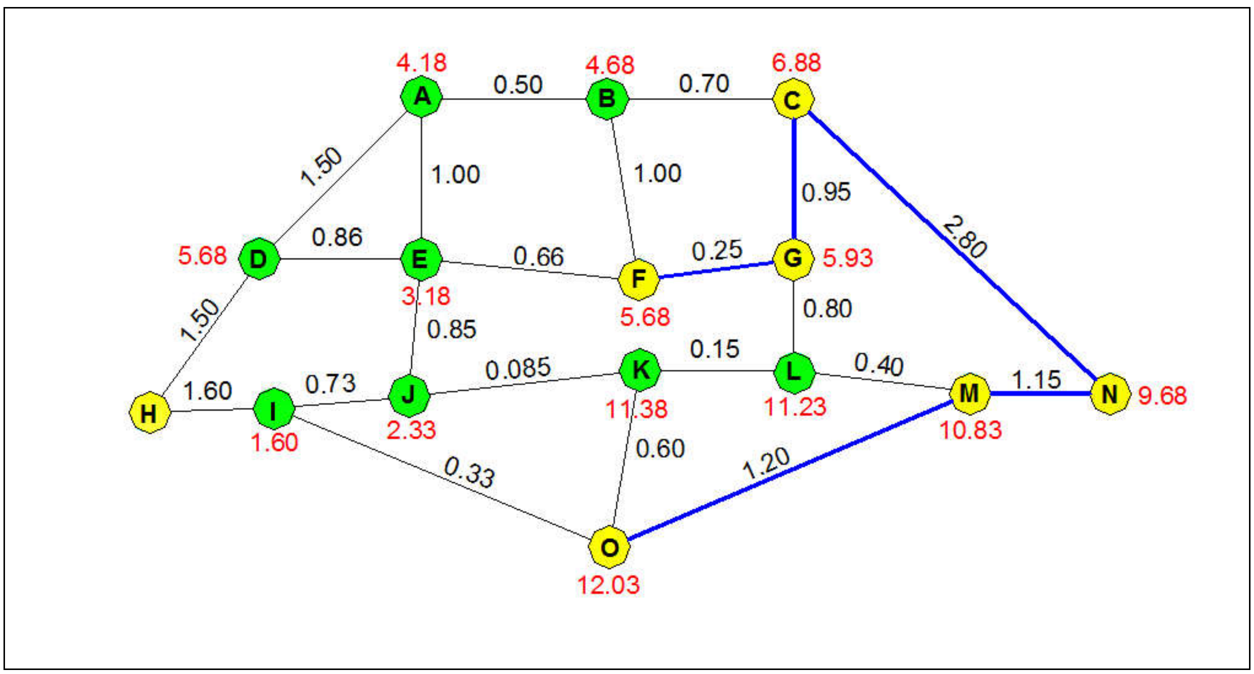
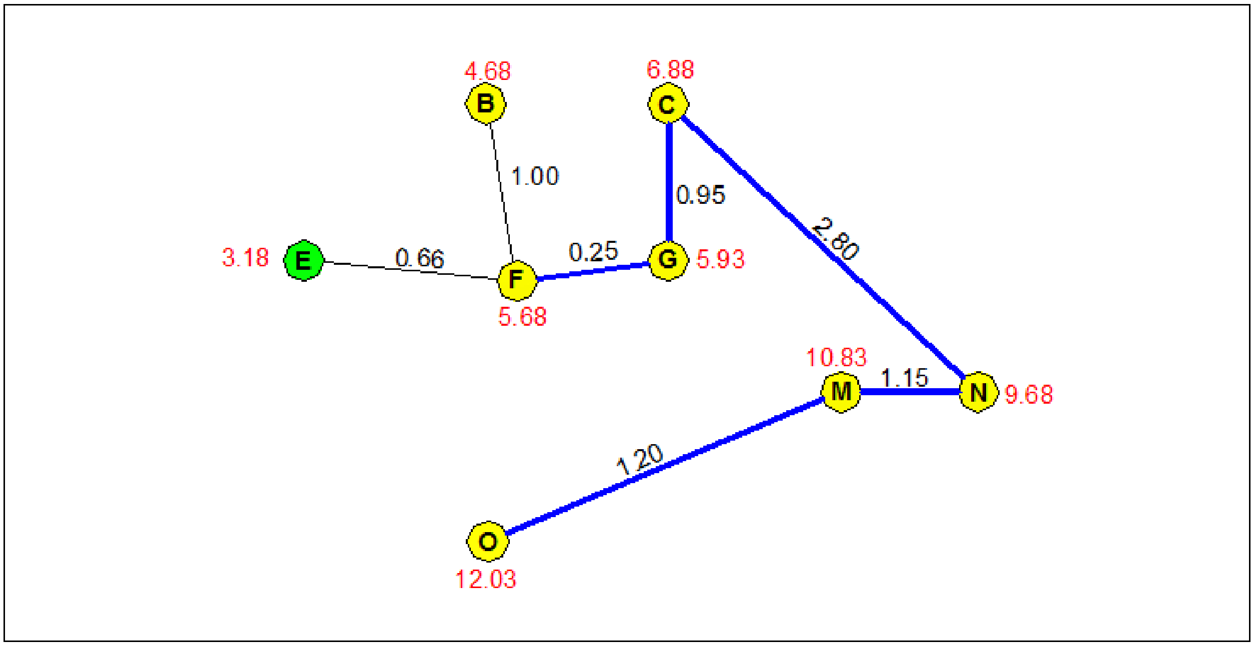




*Figura 4.7.18. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit F zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$5.68-1.00=4.68\surd$$

$$5.68-0.66\neq 3.18$$



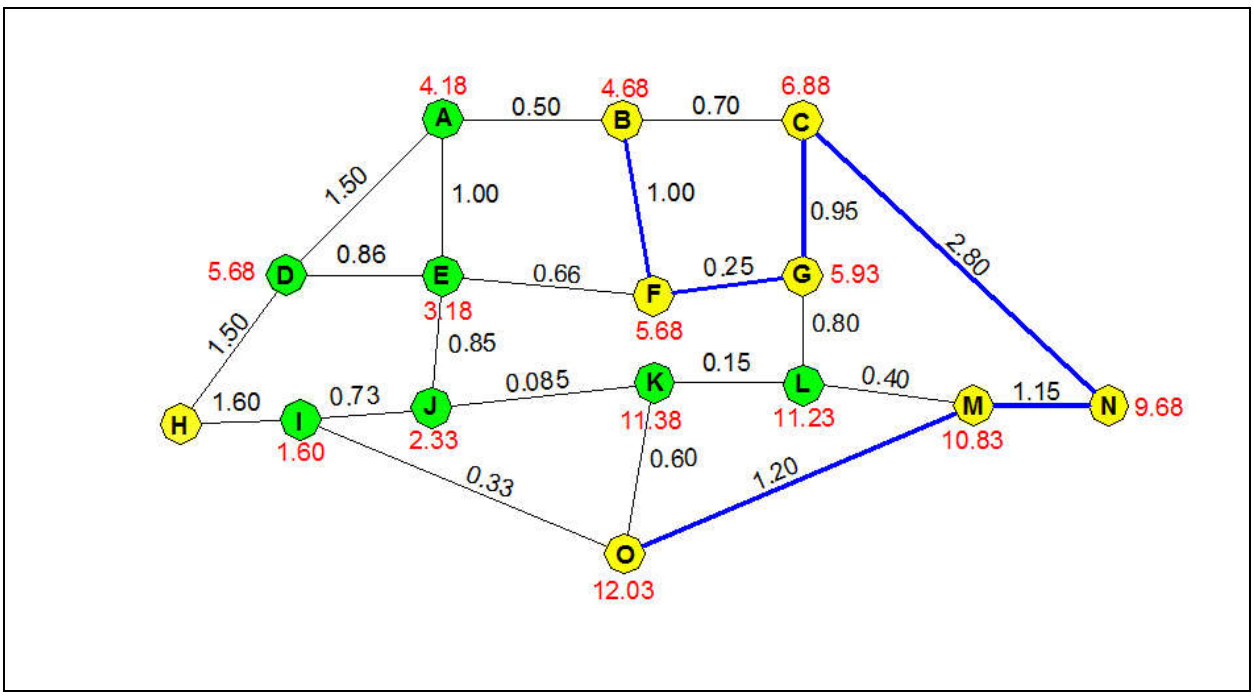
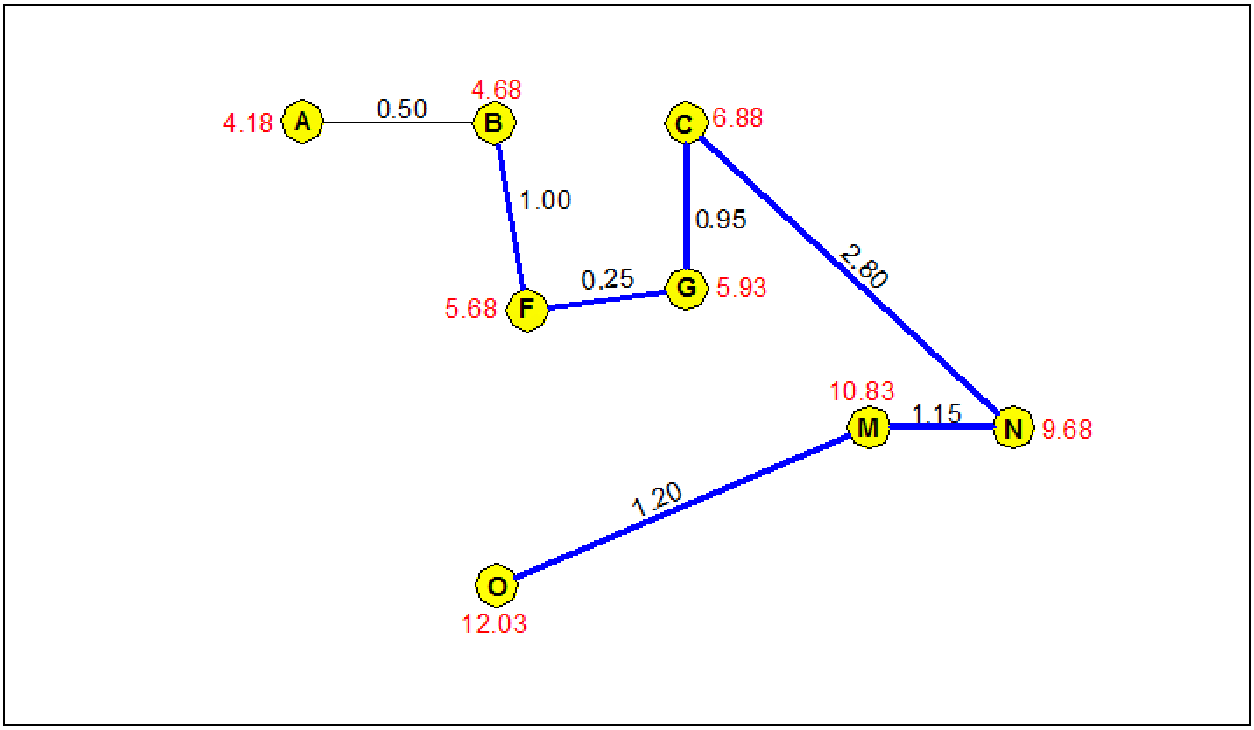




*Figura 4.7.19. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit B zbresim distancën e kulmit fqinjë.

$$4.68-0.50=4.18\surd$$



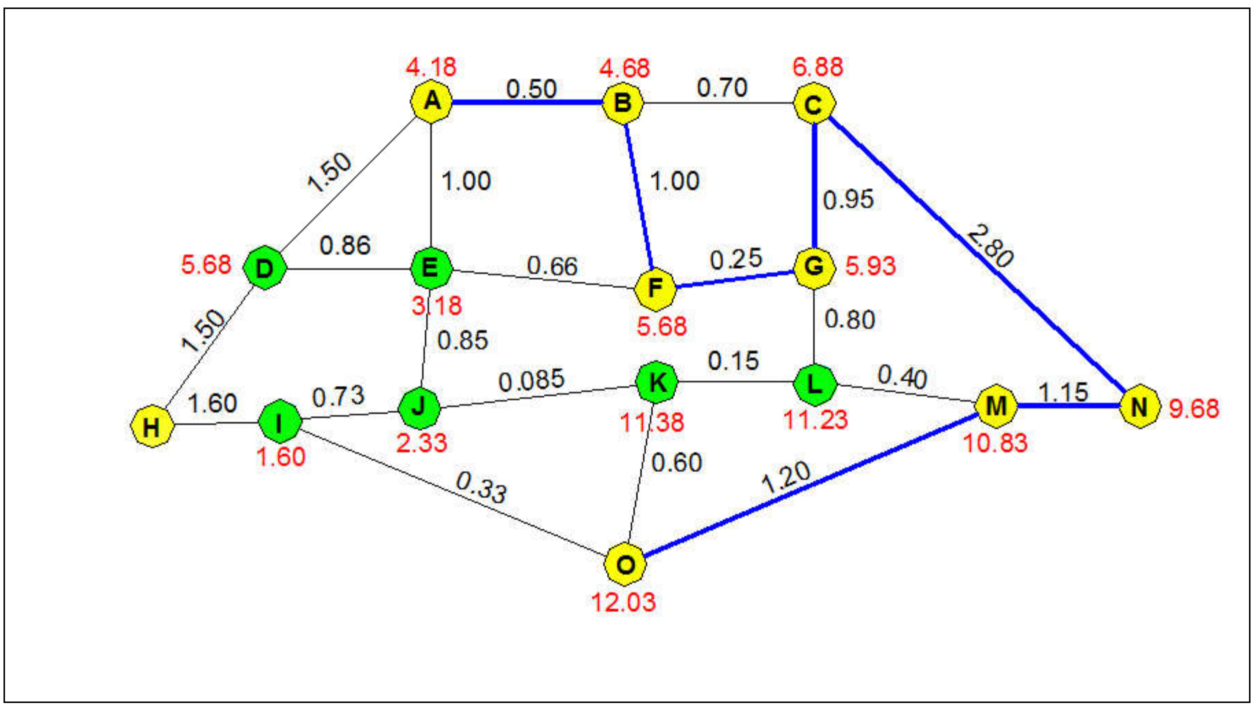
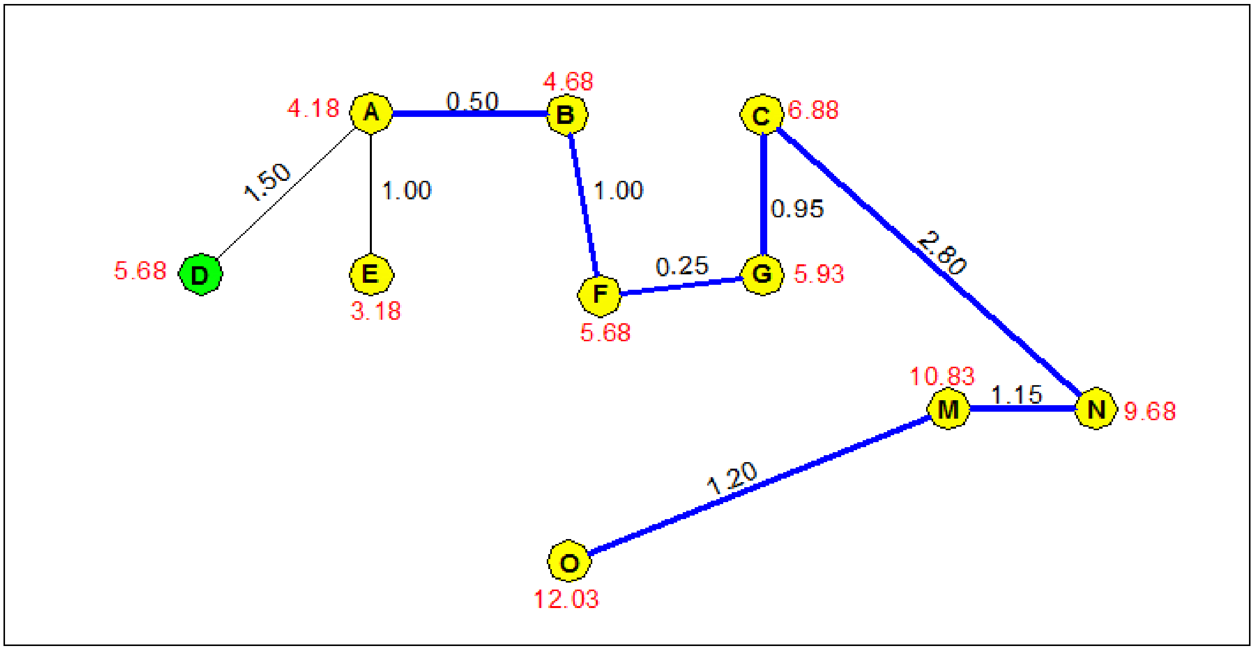




*Figura 4.7.20. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit A zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$4.18-1.50 \neq 5.68$$

$$4.18-1.00=3.18\surd$$



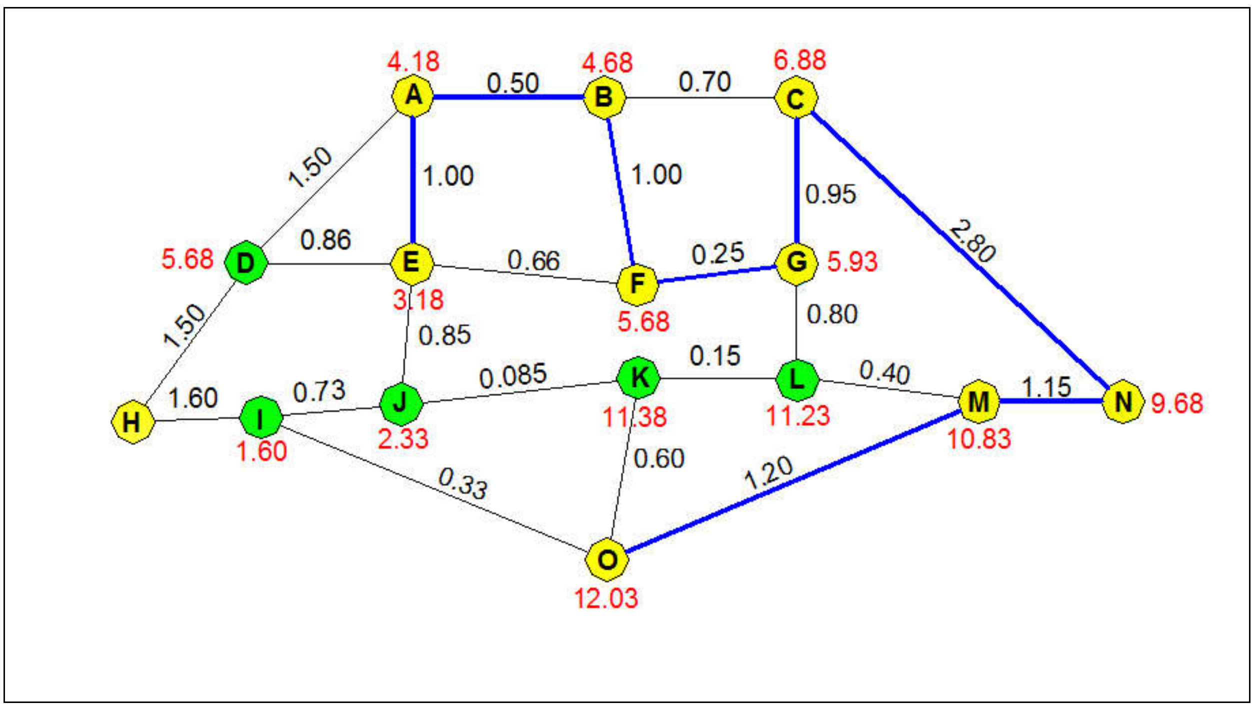
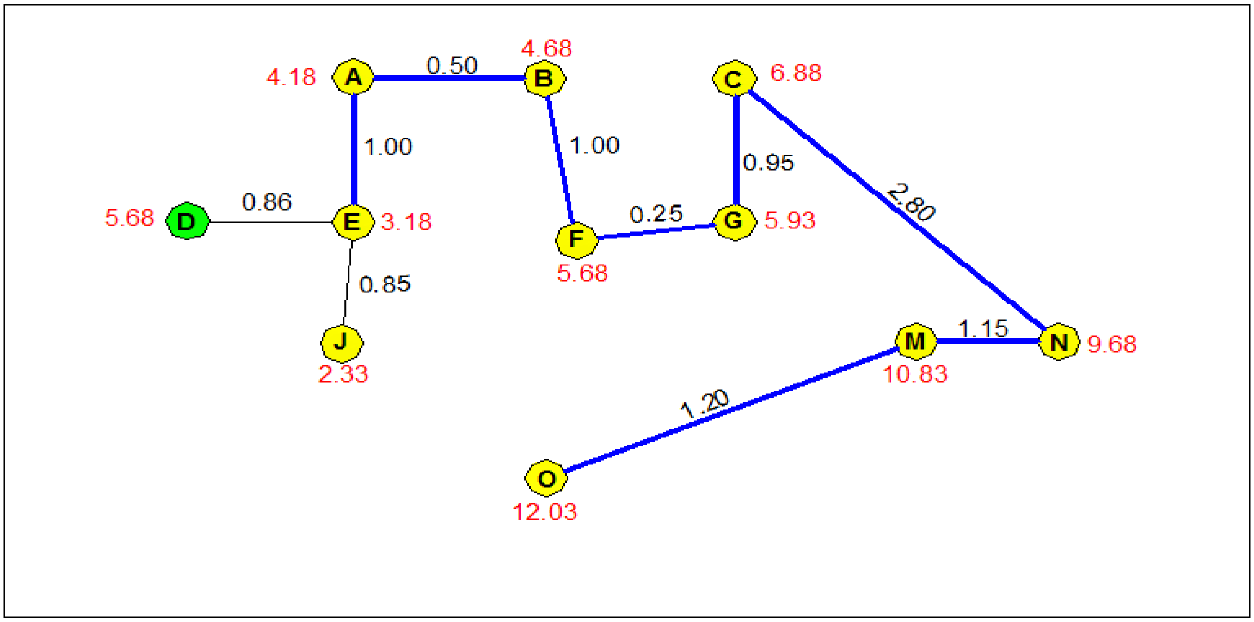




*Figura 4.7.21. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit E zbresim distancën e kulmeve fqinje.

3.18-0.86≠5.68

3.18-0.85=2.33√



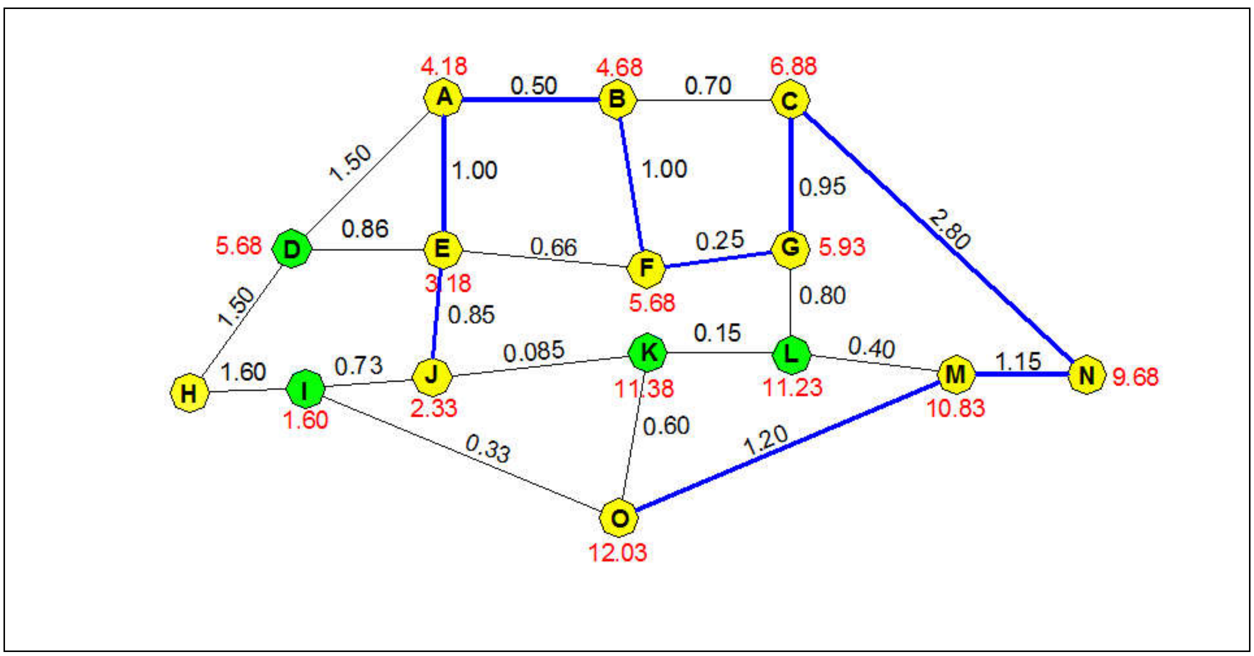
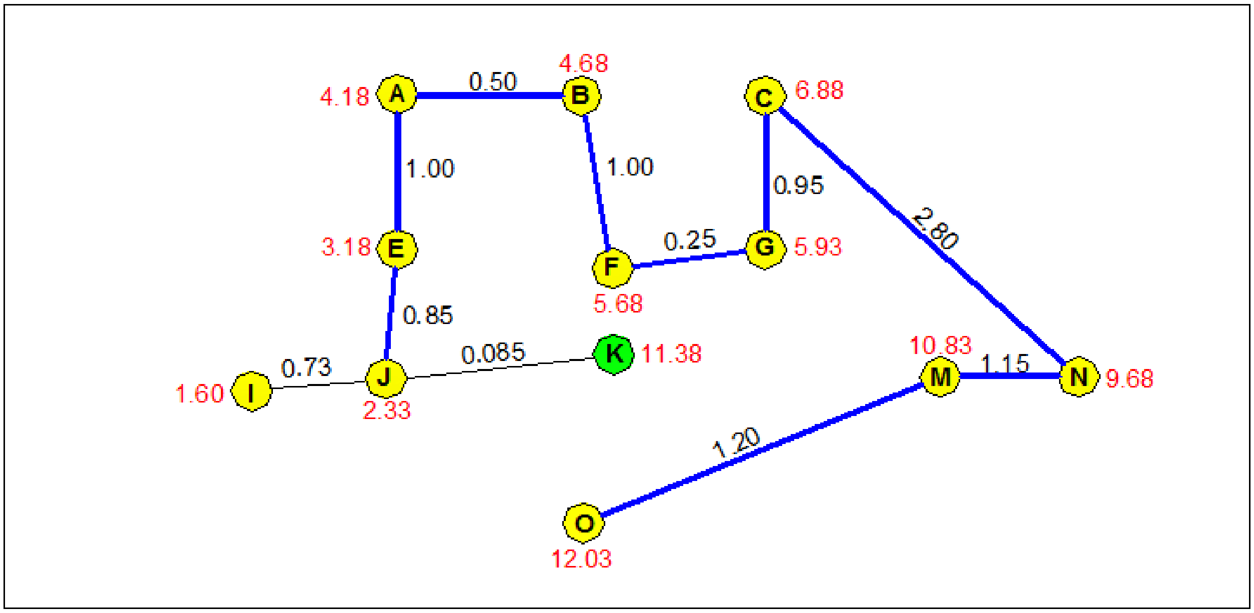




*Figura 4.7.22. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit J zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$2.33-0.73=1.60\surd$$

$$2.33-0.085\neq 11.38$$



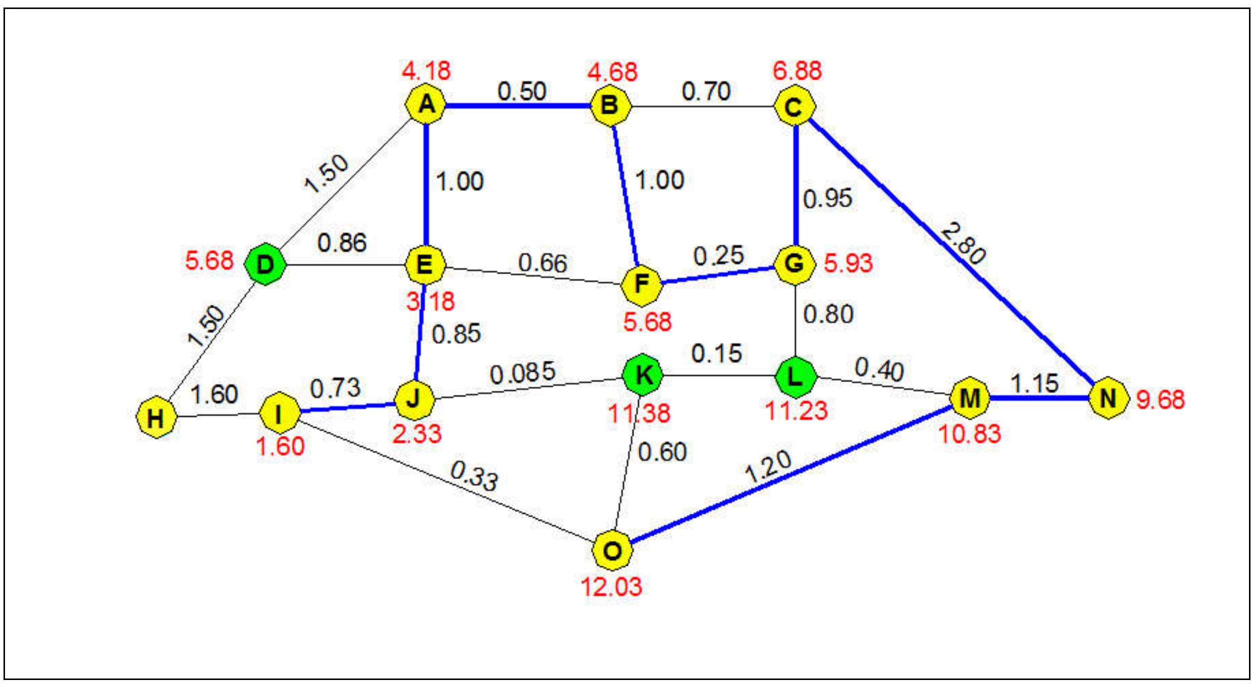




*Figura 4.7.23. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Pastaj prej kulmit I zbresim distancën e kulmit fqinjë.

1.60-1.60=0.00√

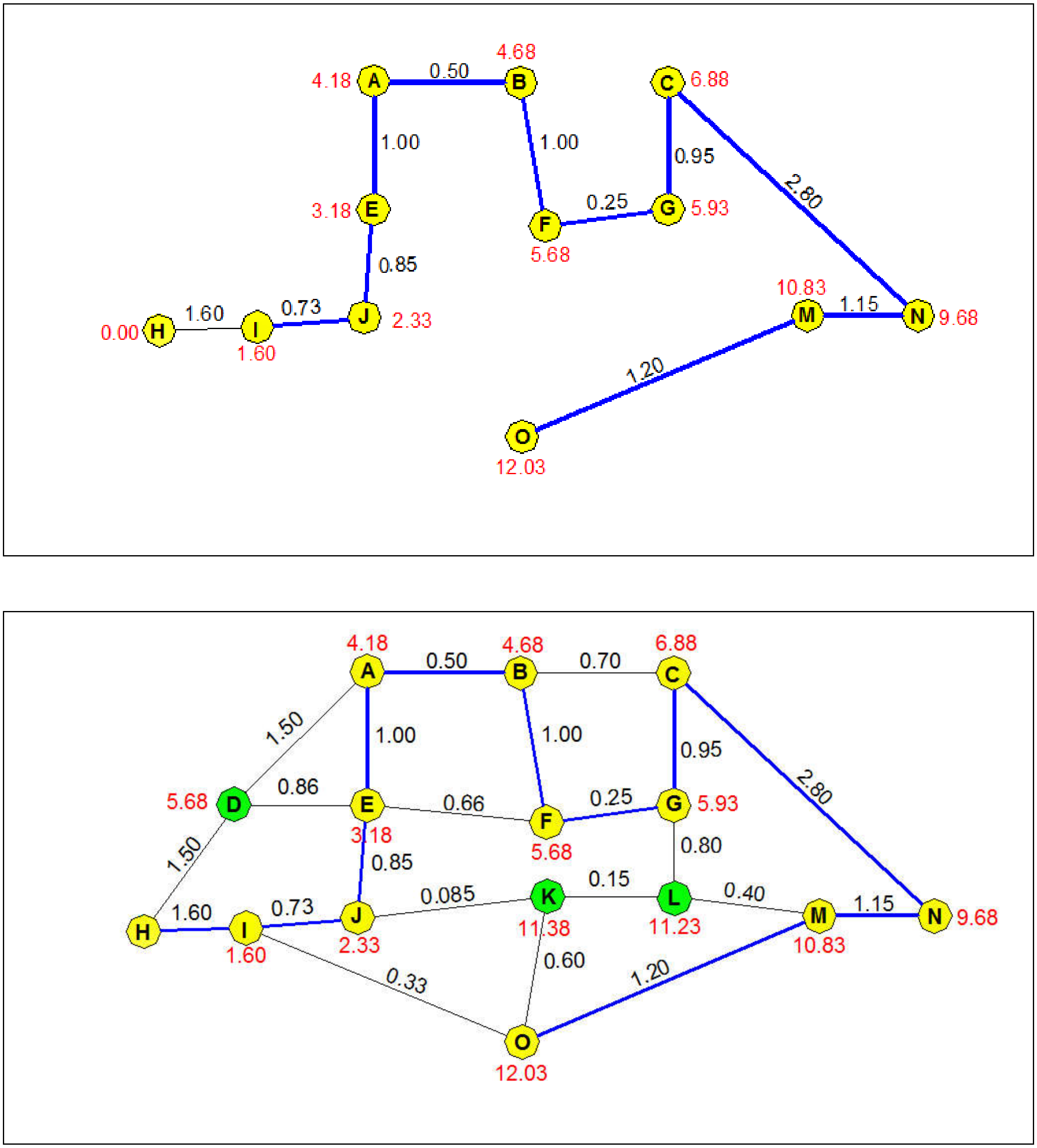



*Figura 4.7.24. Llogaritja e rrugës më të gjatë H-O.*

Rruga me gjatësinë më të gjatë është rruga H-I-J-E-A-B-F-G-C-N-M-O me gjatësi 12.03[km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e gjatë prej kulmit H-O e paraqitur në hartë.

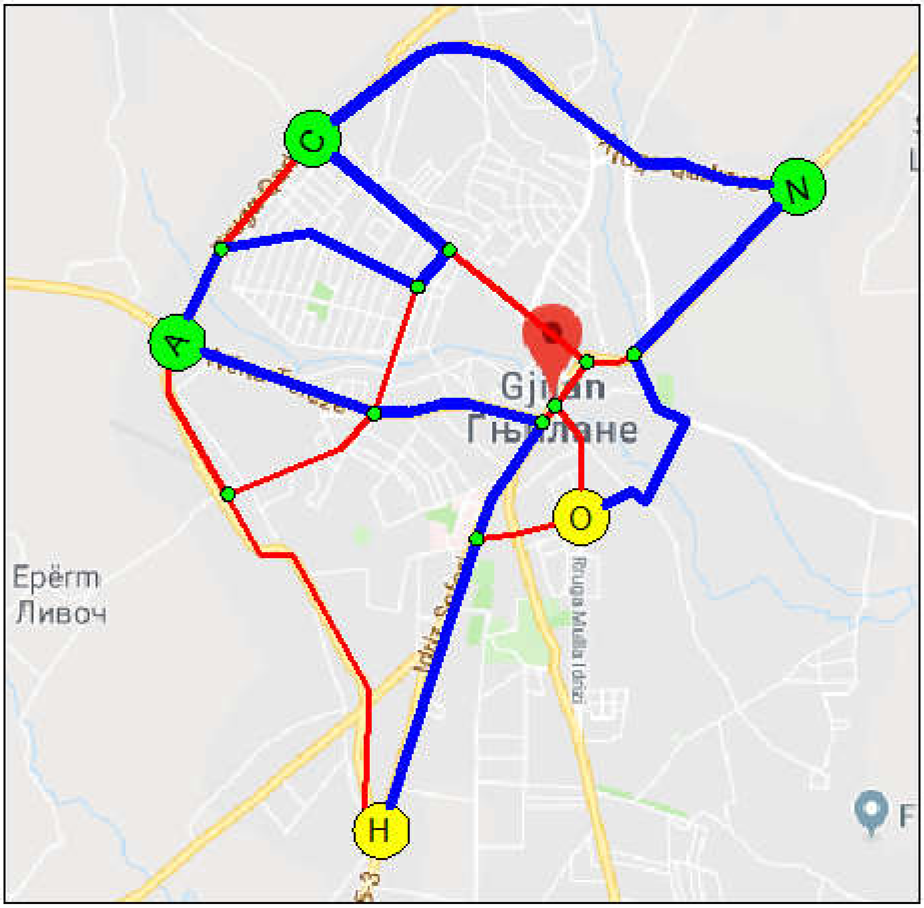



*Figura 4.7.25. Rruga më e gjatë H-O e paraqitur në hartë.*

## 4.8. RRUGA MË E GJATË PREJ KULMIT N NË KULMIN O DHE KOSTO E SHPENZIMEVE MAKSIMALE

Së pari fillojmë nga kulmi N duke e zgjedhur atë si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje nga kulmi N në kulmet (C dhe M).

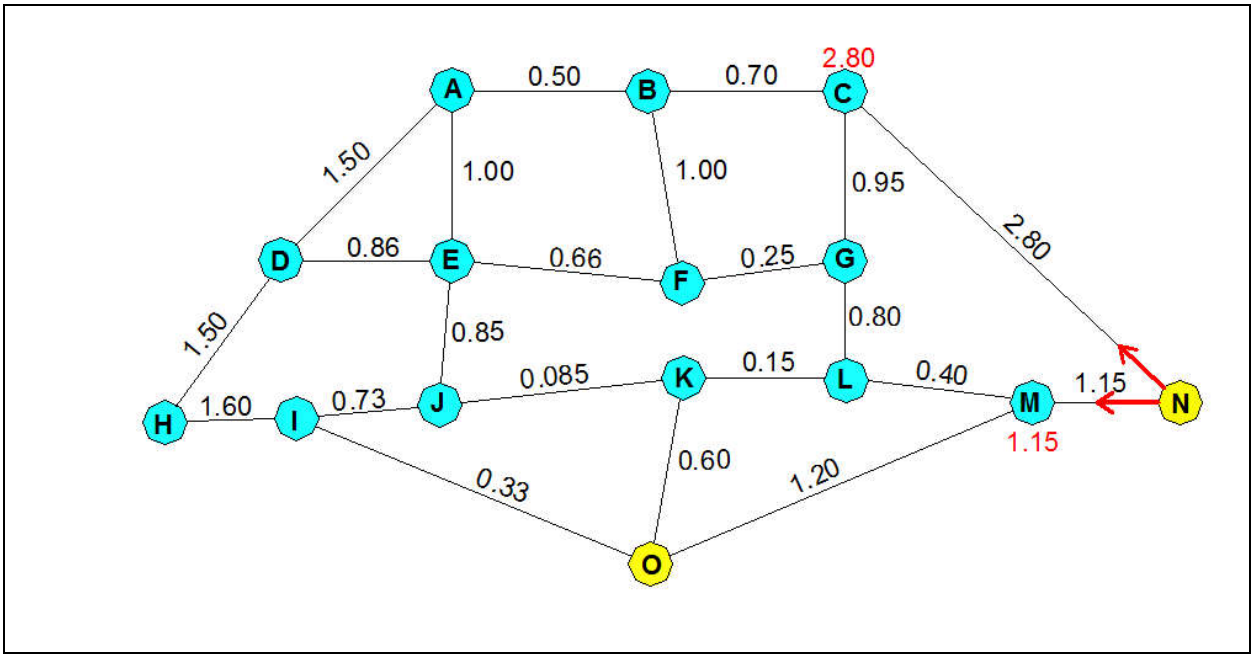



*Figura 4.8.0. Rruga më e gjatë N-O.*

Distanca më e gjatë prej kulmit N në kulmet fqinje (C dhe M) është 2.80.

Pastaj kulmin C me distancën 2.80 e zgjedhim si kulm permanent.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit C me distancë 2.80.

Secilit kulm fqinjë (kulmit B dhe G) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

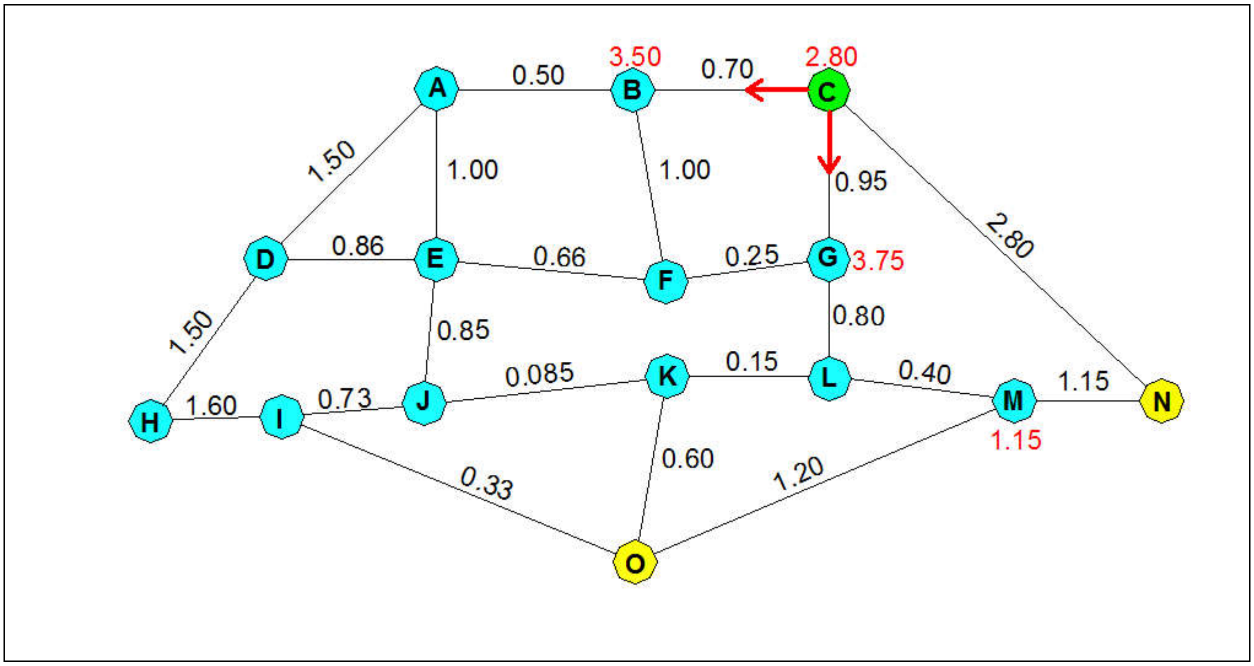



*Figura 4.8.1. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin G me distancën më të gjatë e cila është 3.75.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit G me distancë 3.75.

Secilit kulm fqinjë (kulmit F dhe L) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

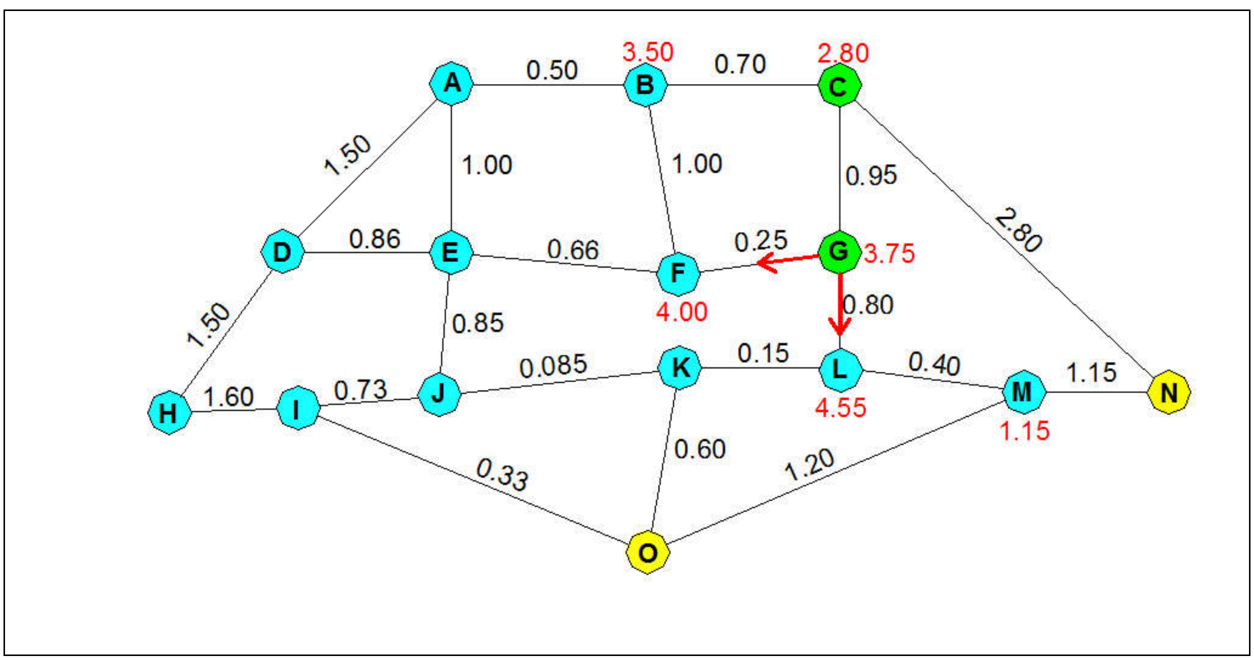



*Figura 4.8.2. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin L me distancën më të gjatë e cila është 4.55.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit L me distancë 4.55.

Secilit kulm fqinjë (kulmit K dhe M) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi L në kulmin M është më e gjatë, 4.95>1.15, atëherë e eleminojmë distancën 1.15.

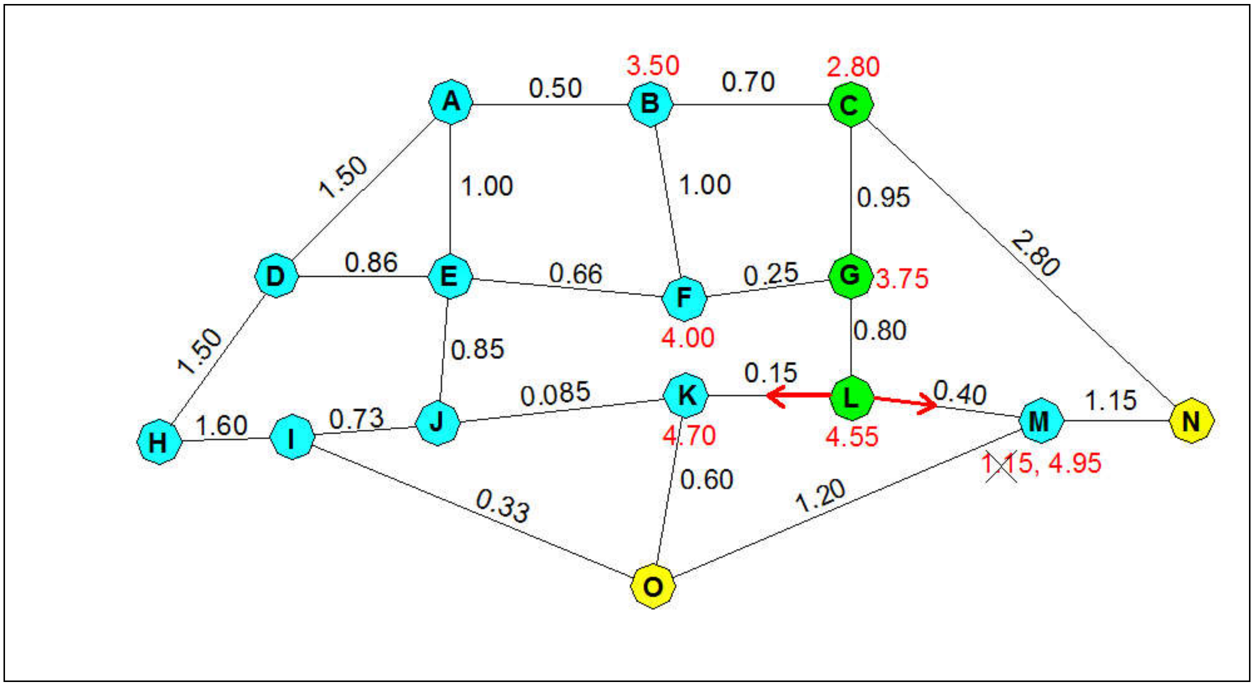



*Figura 4.8.3. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin M me distancën më të gjatë e cila është 4.95.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit M me distancë 4.95.

Kulmit fqinjë ( kulmit O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

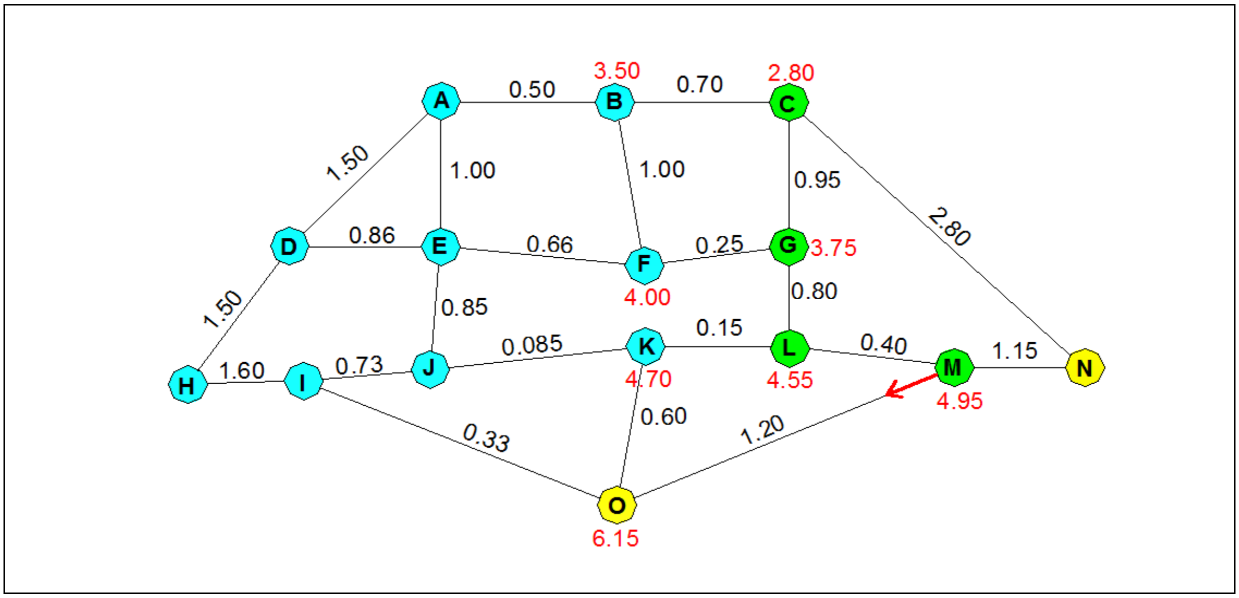



*Figura 4.8.4. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin K me distancën më të gjatë e cila është 4.70.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit K me distancë 4.70.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit J dhe O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi K në kulmin O është më e shkurtë, 5.30<6.15, prandaj mbetet distanca e mëparshme 6.15 dhe ajo 5.30 nuk merret parasysh.

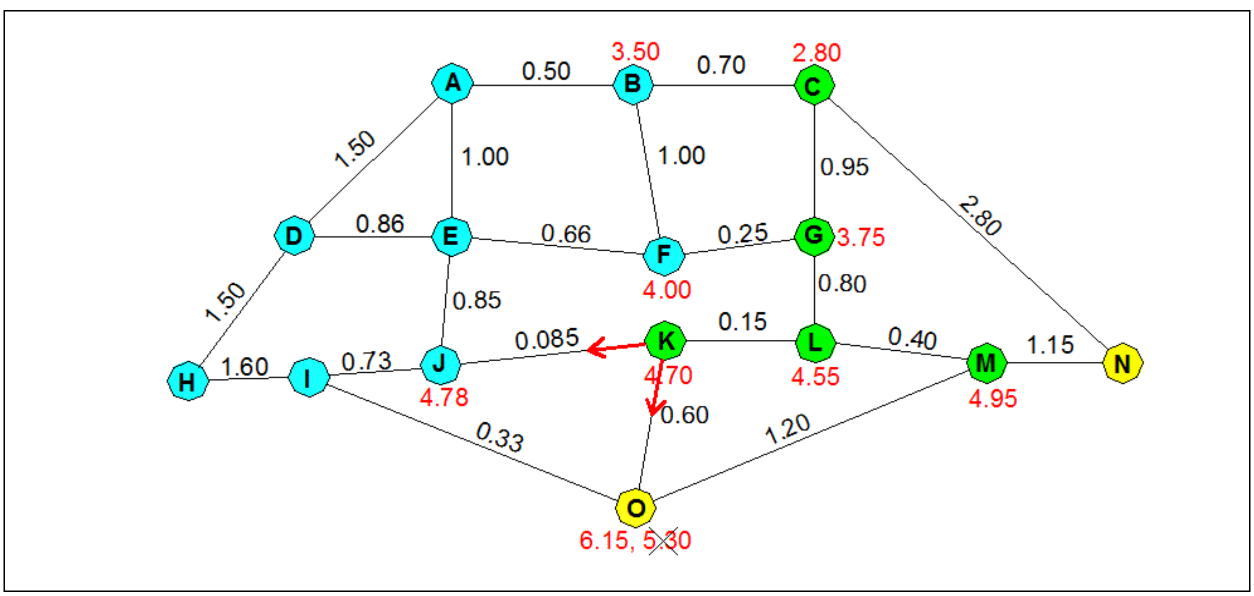



*Figura 4.8.5. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin J me distancën më të gjatë e cila është 4.78.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit J me distancë 4.78.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit E dhe I) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

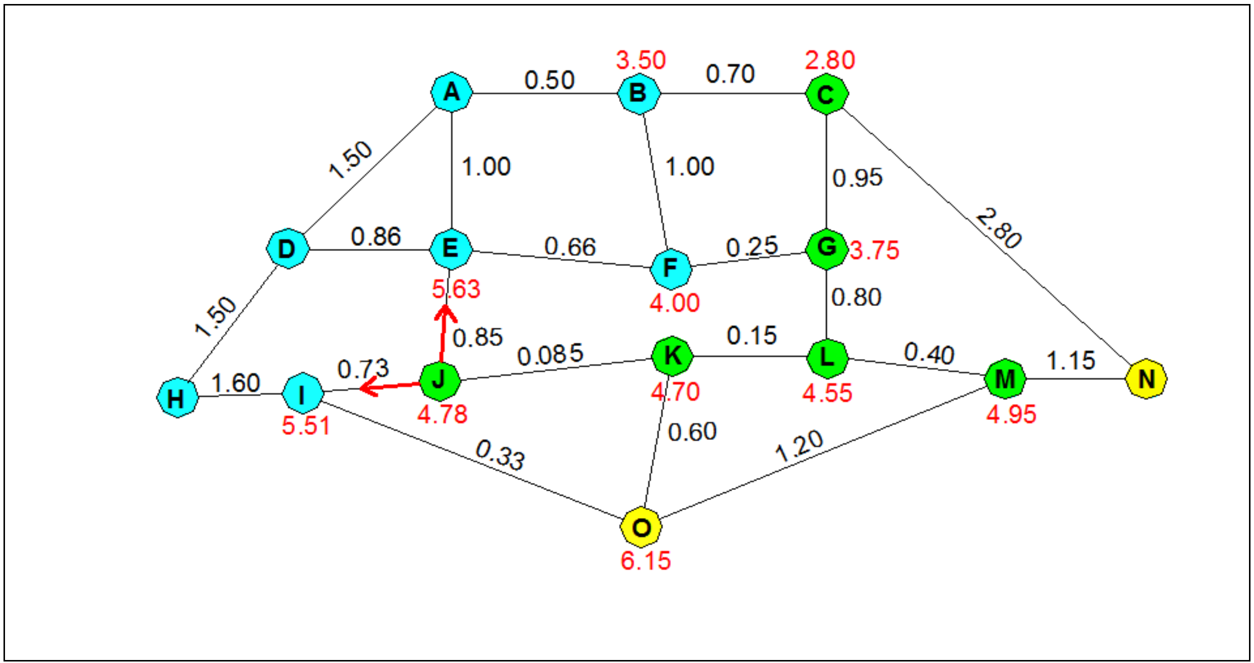



*Figura 4.8.6. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin E me distancën më të gjatë e cila është 5.63.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit E me distancë 5.63.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit A, D dhe F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi E në kulmin F është më e gjatë, 6.29>4.00, atëherë e eleminojmë distancën 4.00.

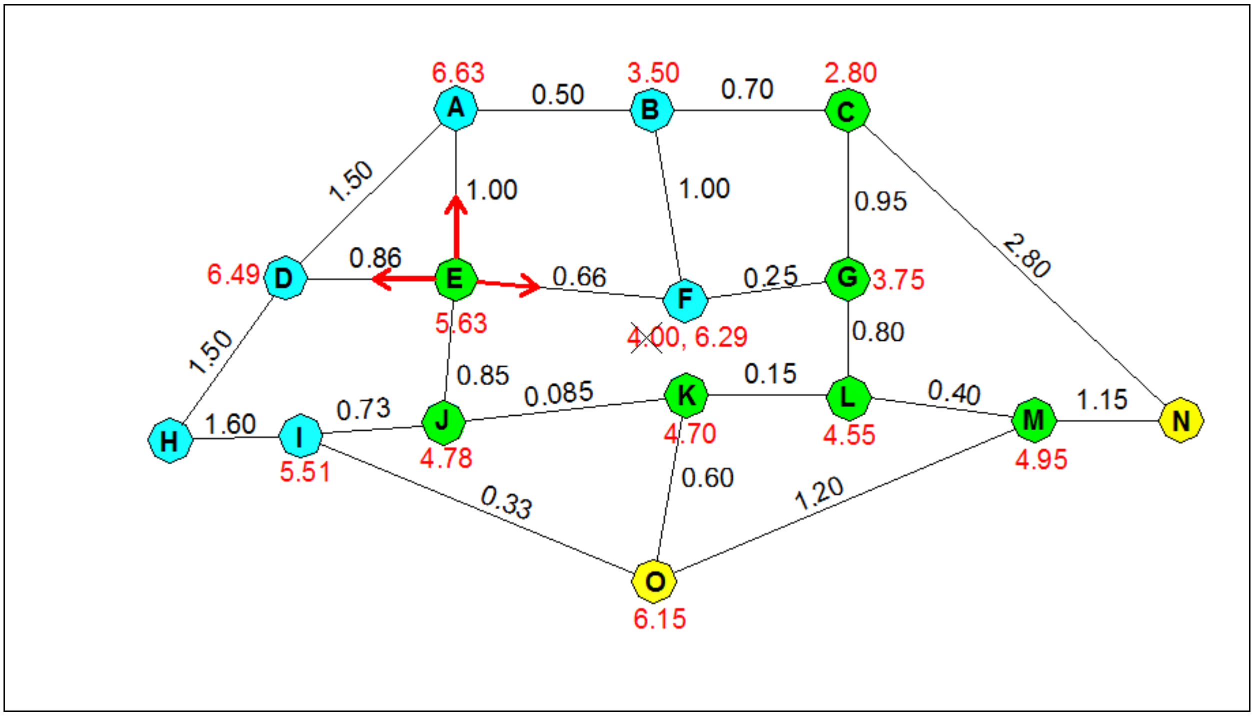



*Figura 4.8.7. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin A me distancën më të gjatë e cila është 6.63.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit A me distancë 6.63.

Secilit kulm fqinjë ( kulmit B dhe D) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi A në kulmin B është më e gjatë, 7.13>3.50, atëherë e eleminojmë distancën 3.50.

Gjithashtu edhe distanca nga kulmi A në kulmin D është më e gjatë, 8.13>6.49, atëherë e eleminojmë distancën 6.49.

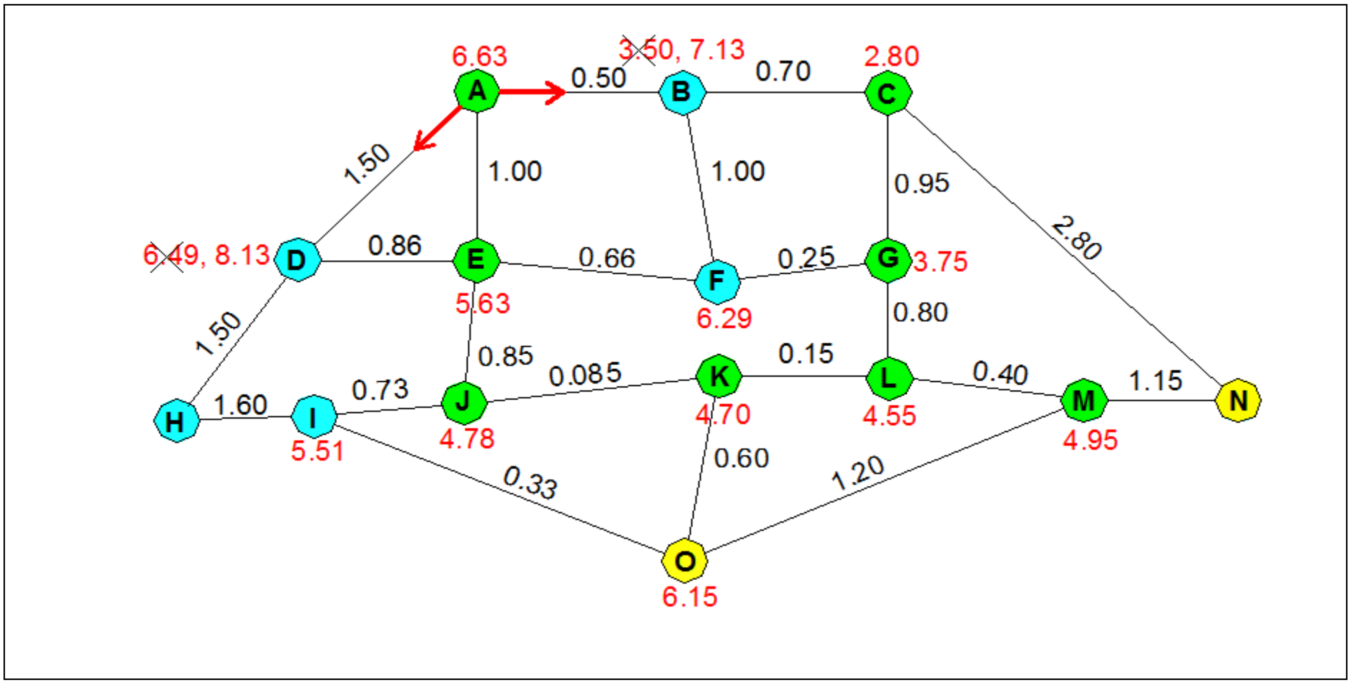



*Figura 4.8.8. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin D me distancën më të gjatë e cila është 8.13.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit D me distancë 8.13.

Kulmit fqinjë ( kulmit H) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

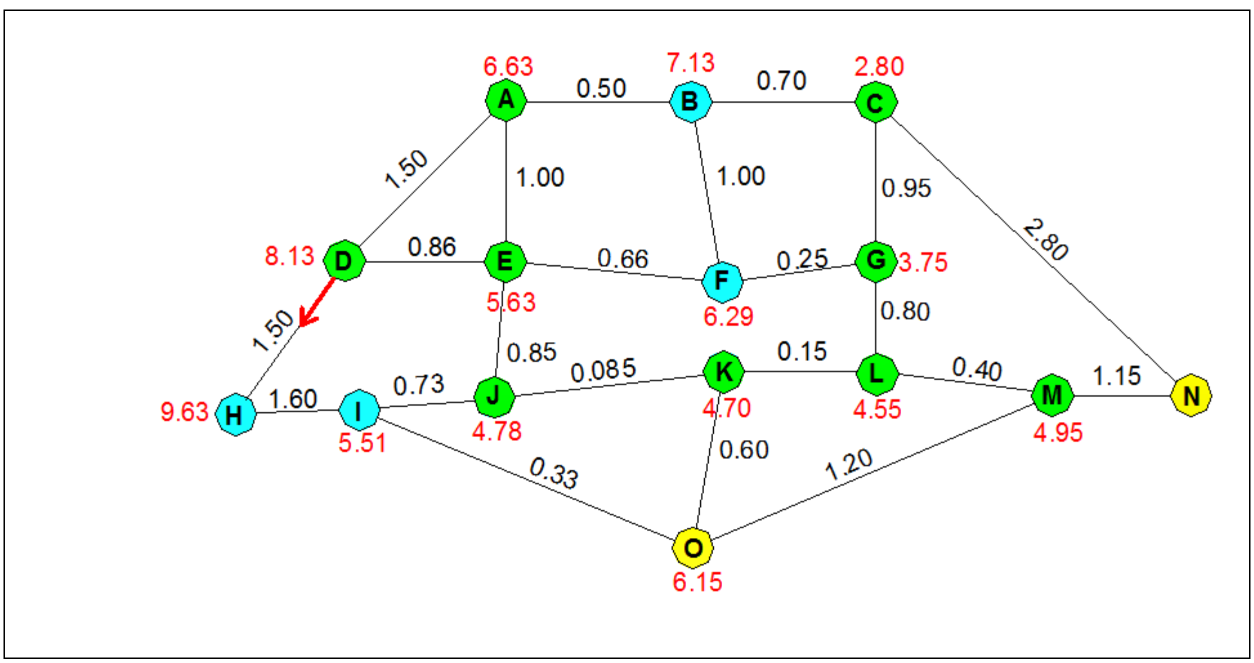



*Figura 4.8.9. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin H me distancën më të gjatë e cila është 9.63.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit H me distancë 9.63.

Kulmit fqinjë ( kulmit I) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi H në kulmin I është më e gjatë, 11.23>5.51, atëherë e eleminojmë distancën 5.51.

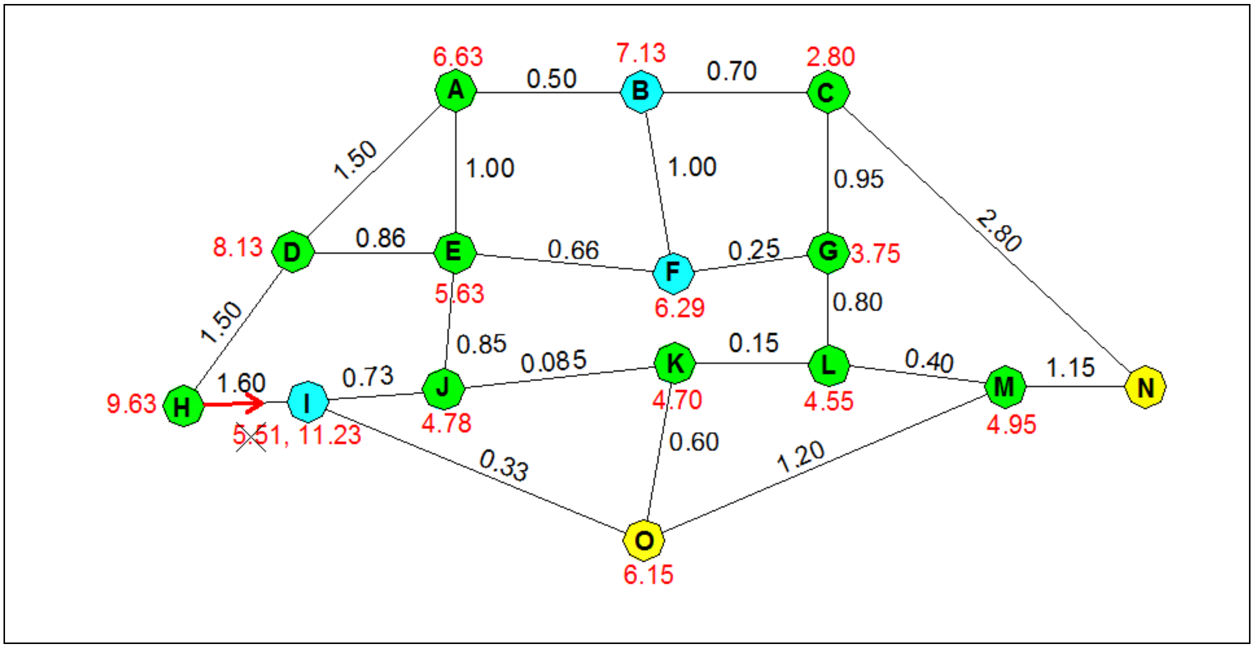



*Figura 4.8.10. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin I me distancën më të gjatë e cila është 11.23.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit I me distancë 11.23.

Kulmit fqinjë ( kulmit O) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi I në kulmin O është më e gjatë, 11.56>6.15, atëherë e eleminojmë distancën 6.15.

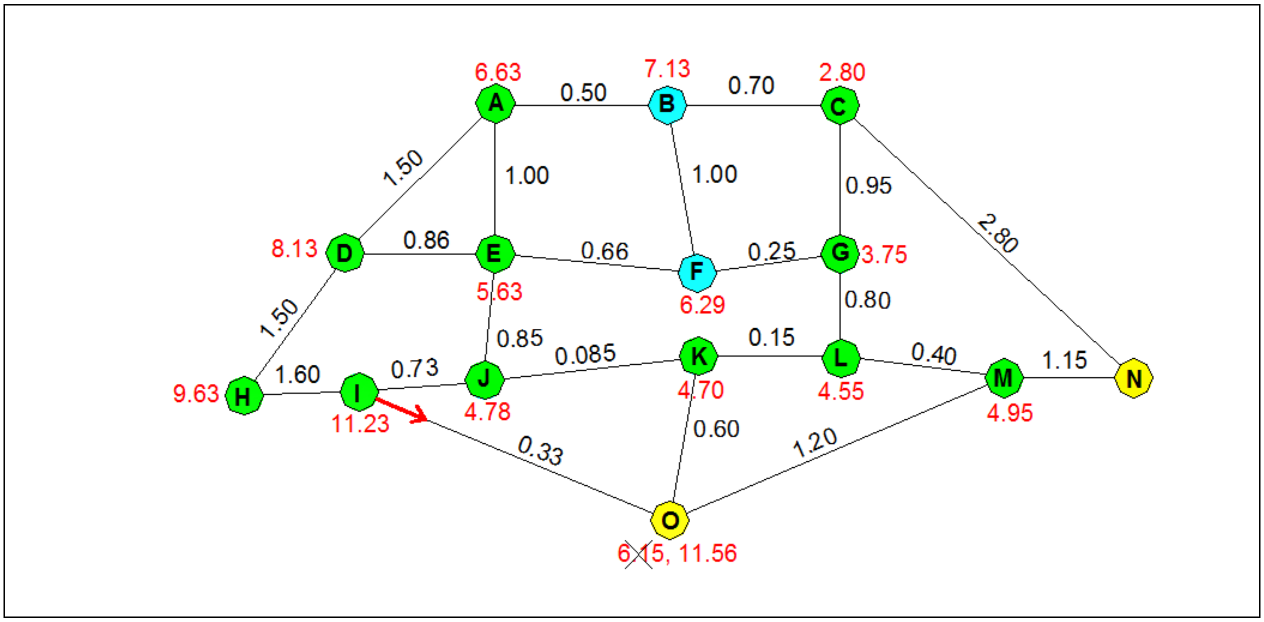



*Figura 4.8.11. Rruga më e gjatë N-O.*

Zgjedhim distancën më të gjatë nga kulmi N.

Dhe me këtë rast e bëjmë permanent kulmin B me distancën më të gjatë e cila është 7.13.

Shikojmë distancat e kulmeve fqinje prej kulmit B me distancë 7.13.

Kulmit fqinjë ( kulmit F) ia shtojmë edhe distancën e kulmit permanent.

Meqenëse distanca nga kulmi B në kulmin F është më e gjatë, 8.13>6.29, atëherë e eleminojmë distancën 6.29.

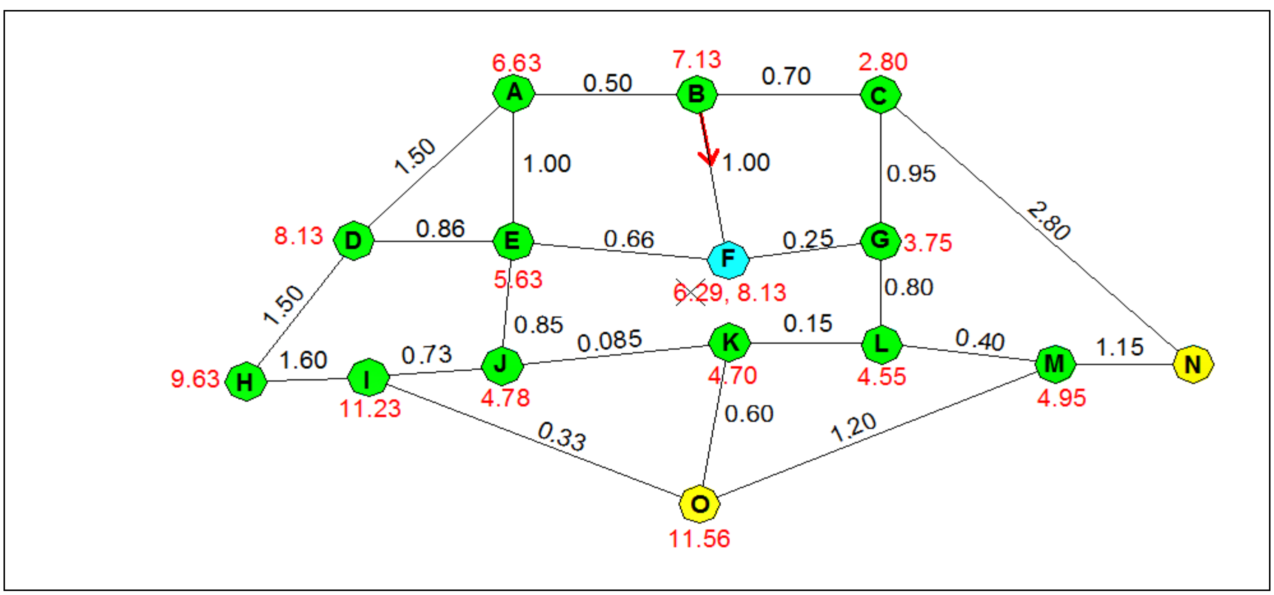



*Figura 4.8.12. Rruga më e gjatë N-O.*

Grafi me të gjitha kulmet permanente është paraqitur në figurën e mëposhtme.

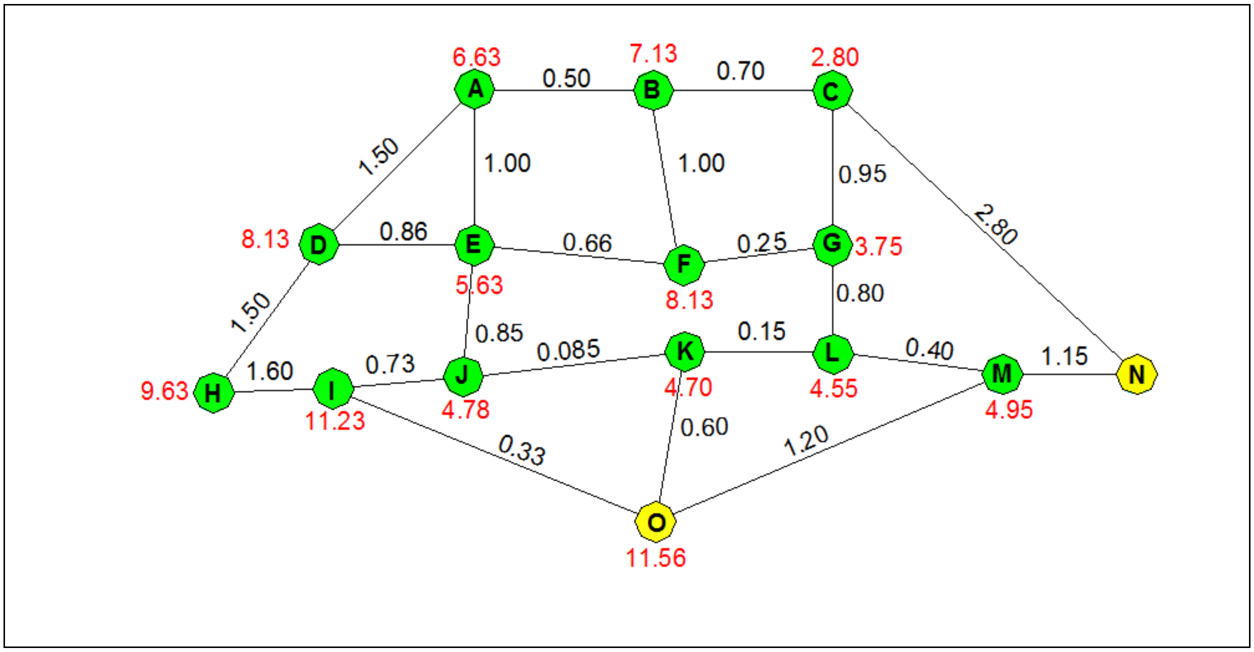



*Figura 4.8.13. Rruga më e gjatë N-O.*

**Llogaritja e rrugës maksimale N-O.**

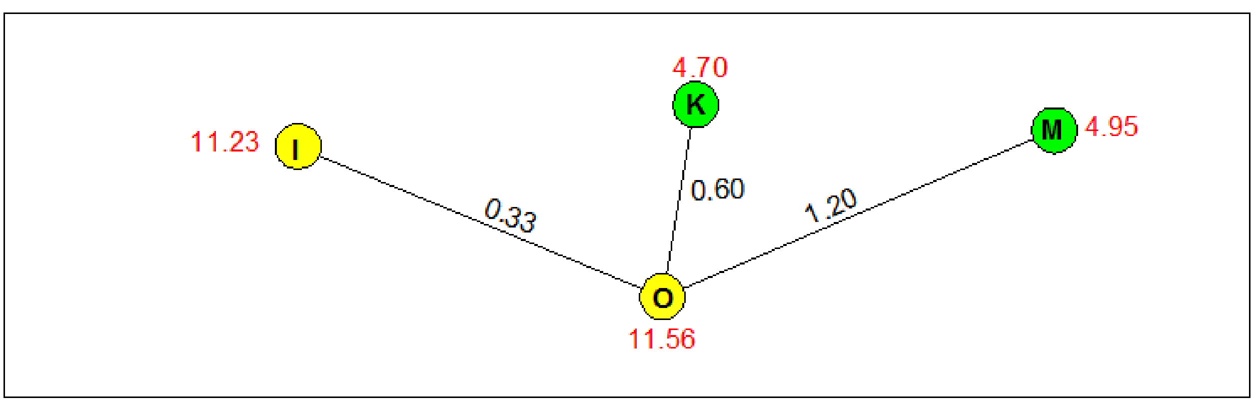
Tani mund të llogaritim rrugën maksimale prej kulmit N në atë O.

Këtë mund ta bëjmë duke u nisur nga kulmi O dhe duke zbritur nga ky kulm distancën e secilit kulm fqinjë të kulmit O.

$$11.56-0.33=11.23\surd$$

$$11.56-0.60\neq 4.70$$

$$11.56-1.20\neq 4.95$$



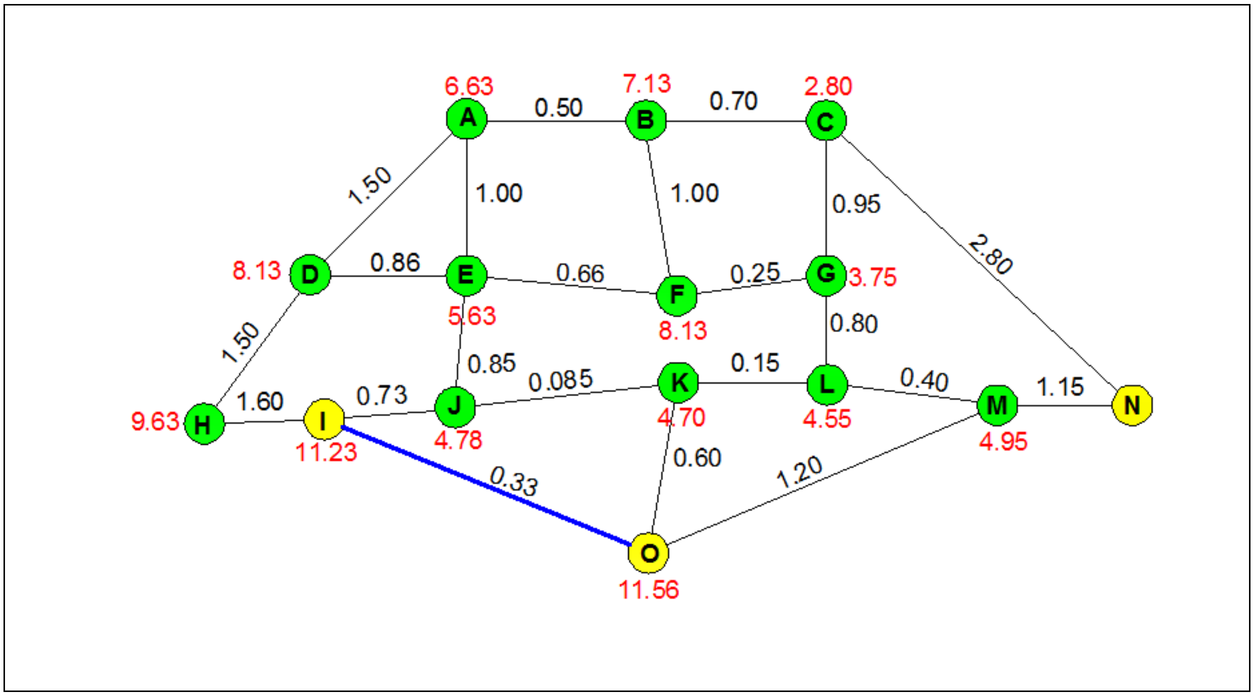
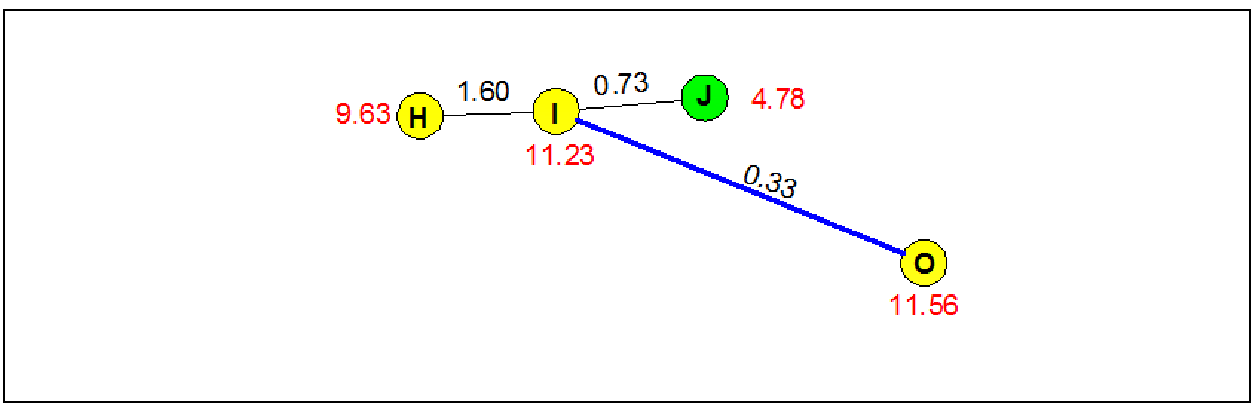



*Figura 4.8.14. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Vazhdon procedura e njëjtë. Tani prej kulmit I zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$11.23-1.60=9.63\surd$$

$$11.23-0.73\neq 4.78$$



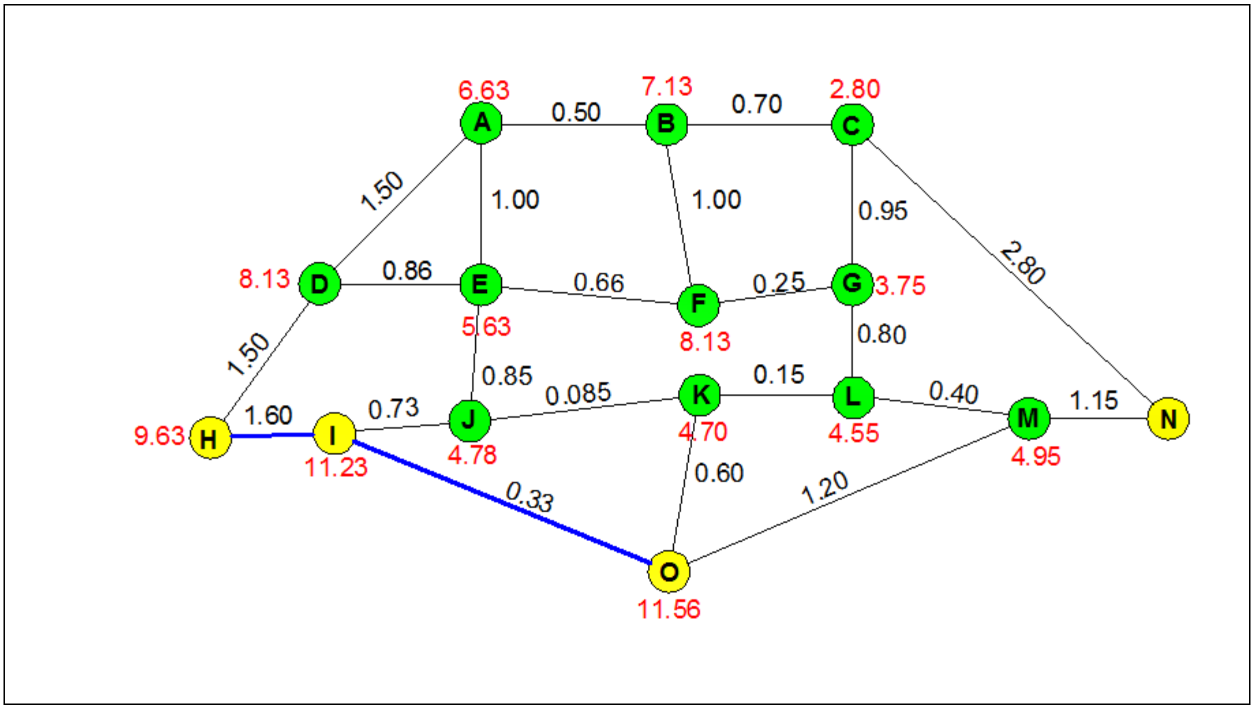
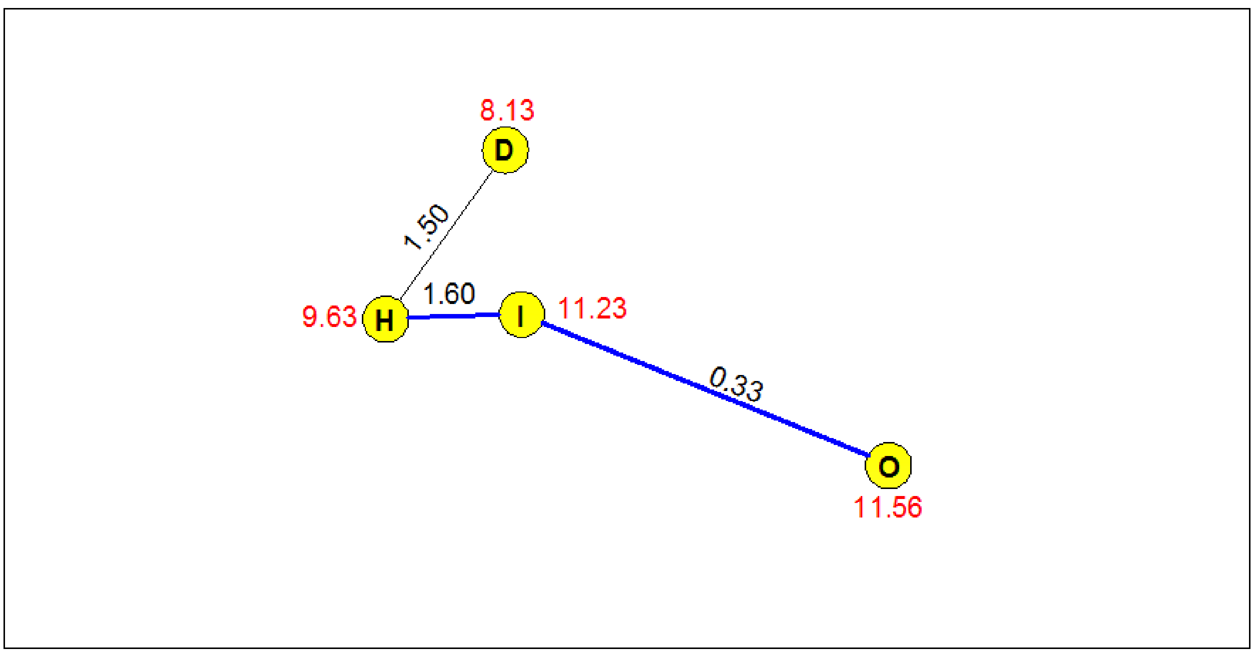



*Figura 4.8.15. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit H zbresim distancën e kulmit fqinjë.

9.63-1.50=8.13√



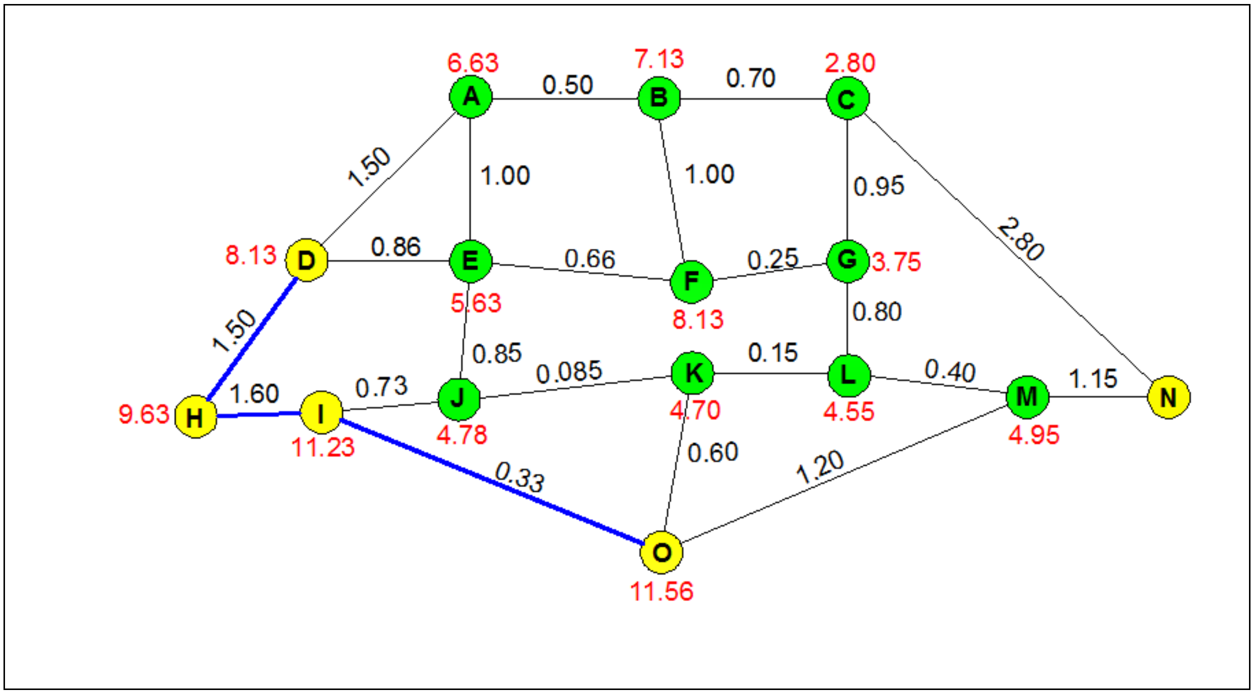
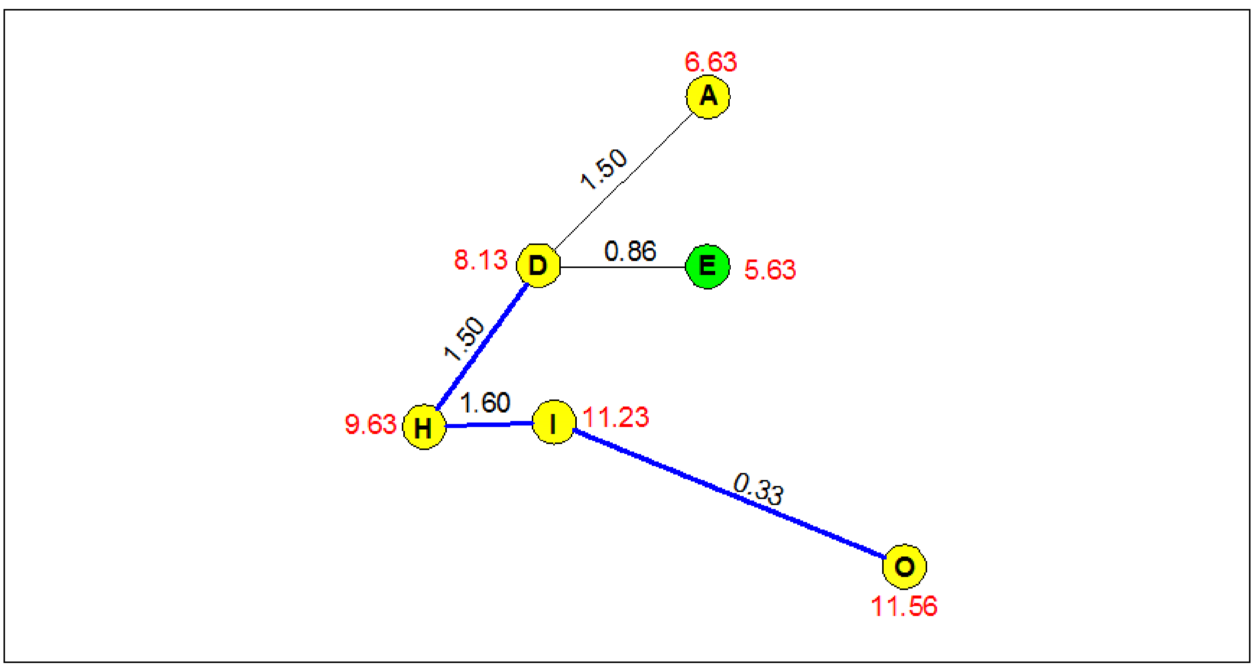



*Figura 4.8.16. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit D zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$8.13-1.50=6.63\surd$$

$$8.13-0.86\neq5.63$$



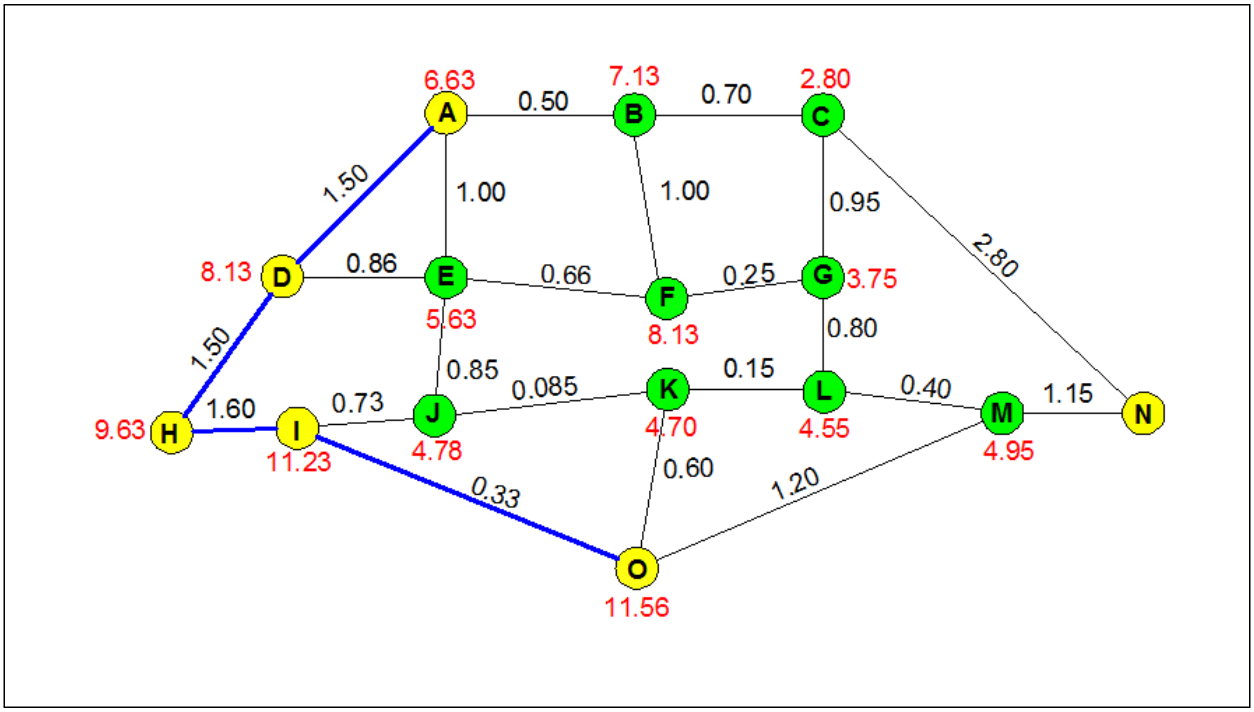
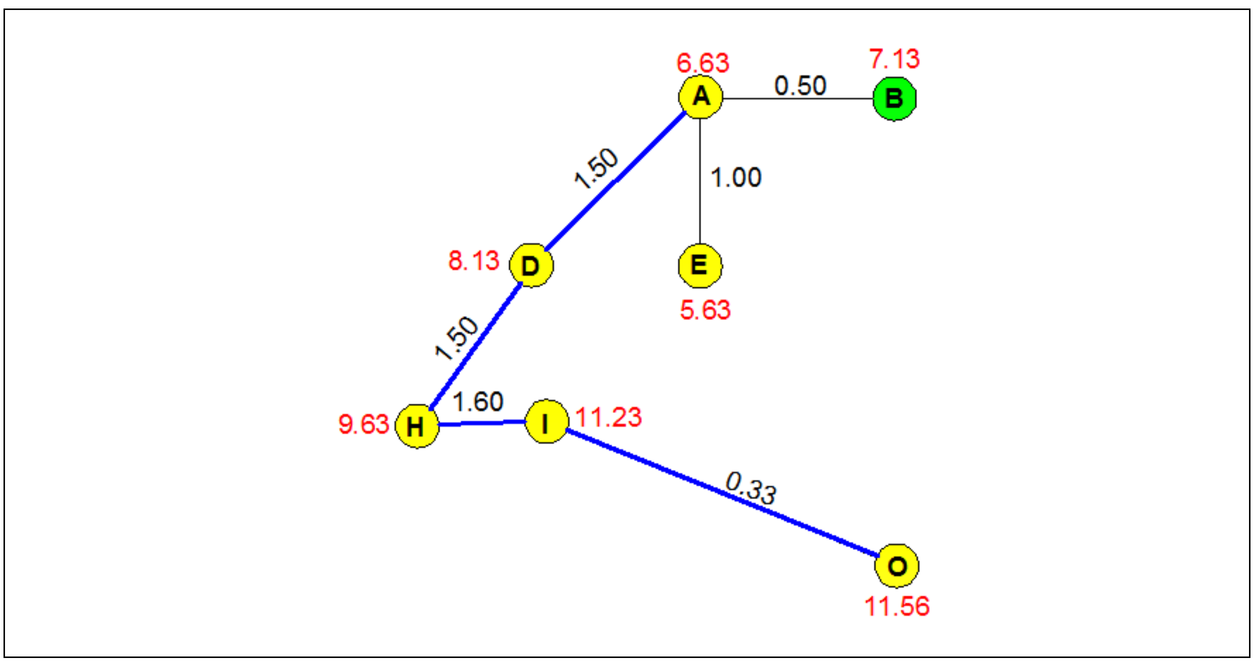



*Figura 4.8.17. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit A zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$6.63-0.50 \neq 7.13$$

$$6.63-1.00=5.63\surd$$



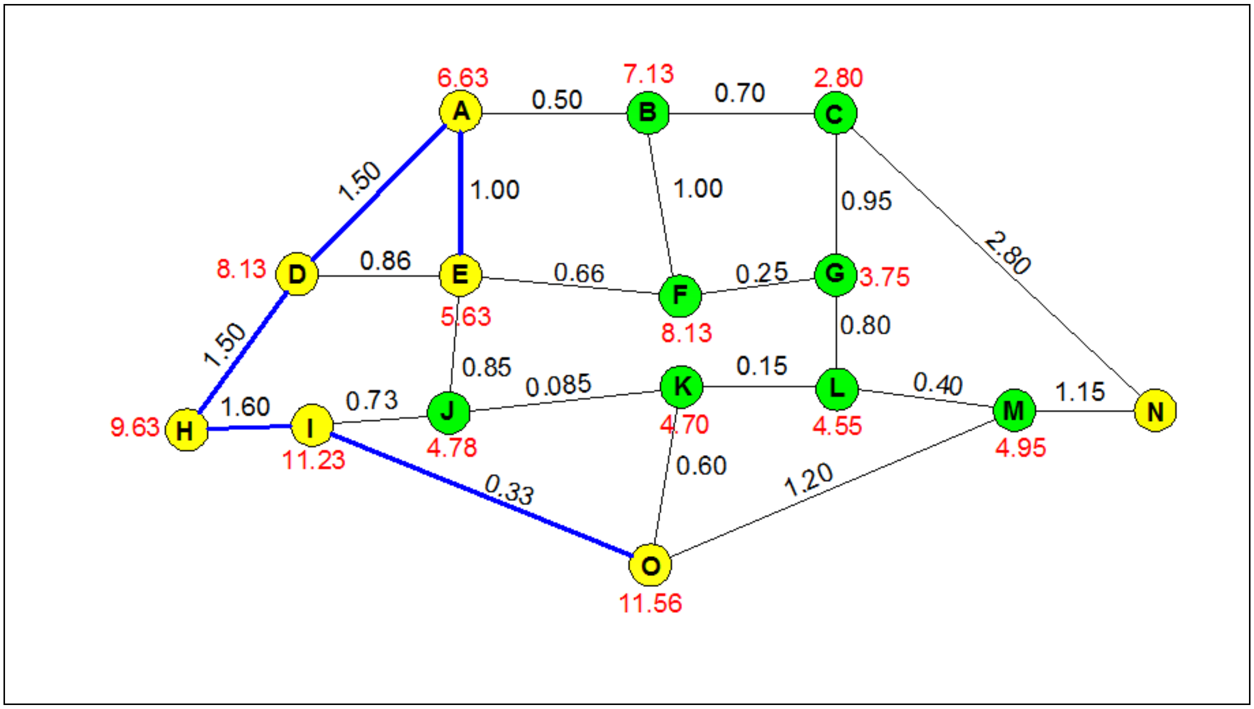
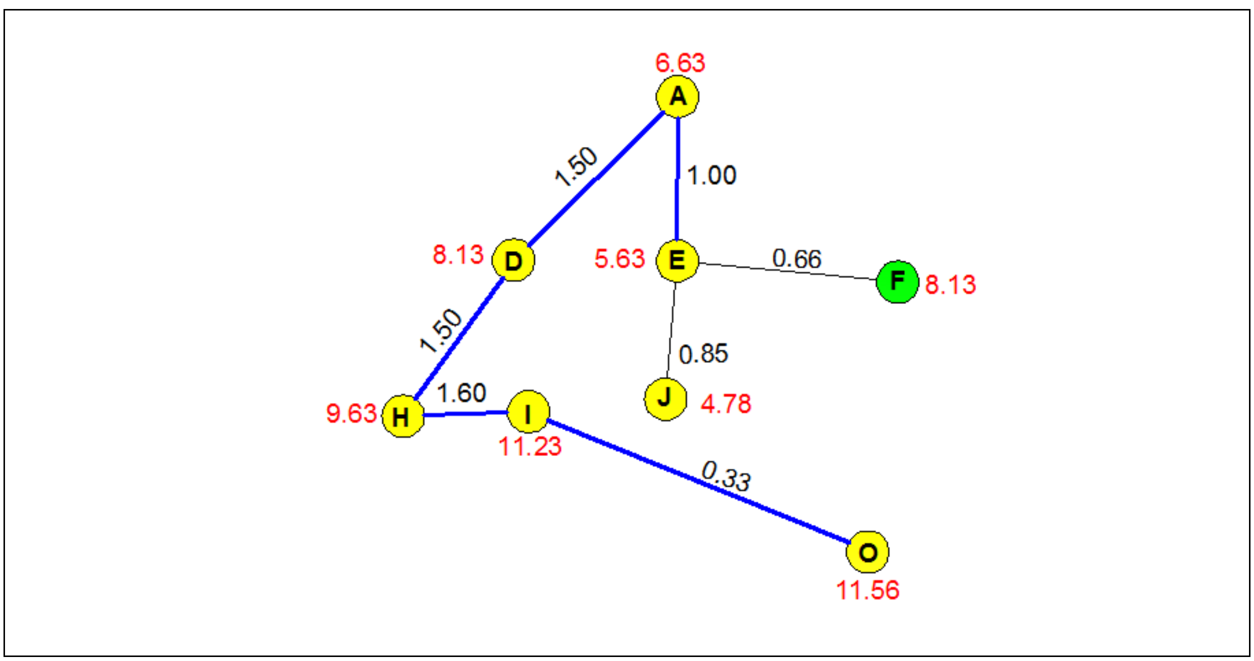



*Figura 4.8.18. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit E zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$5.63-0.66\neq 8.13$$

$$5.63-0.85=4.78\surd$$



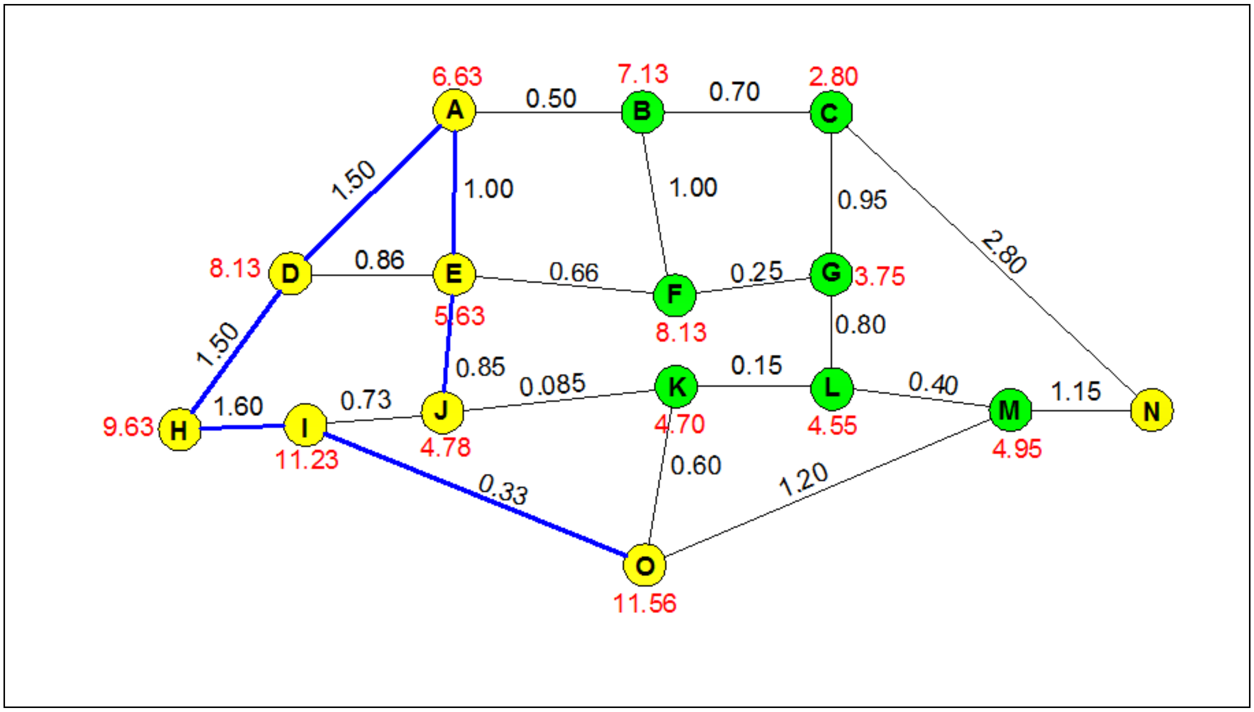
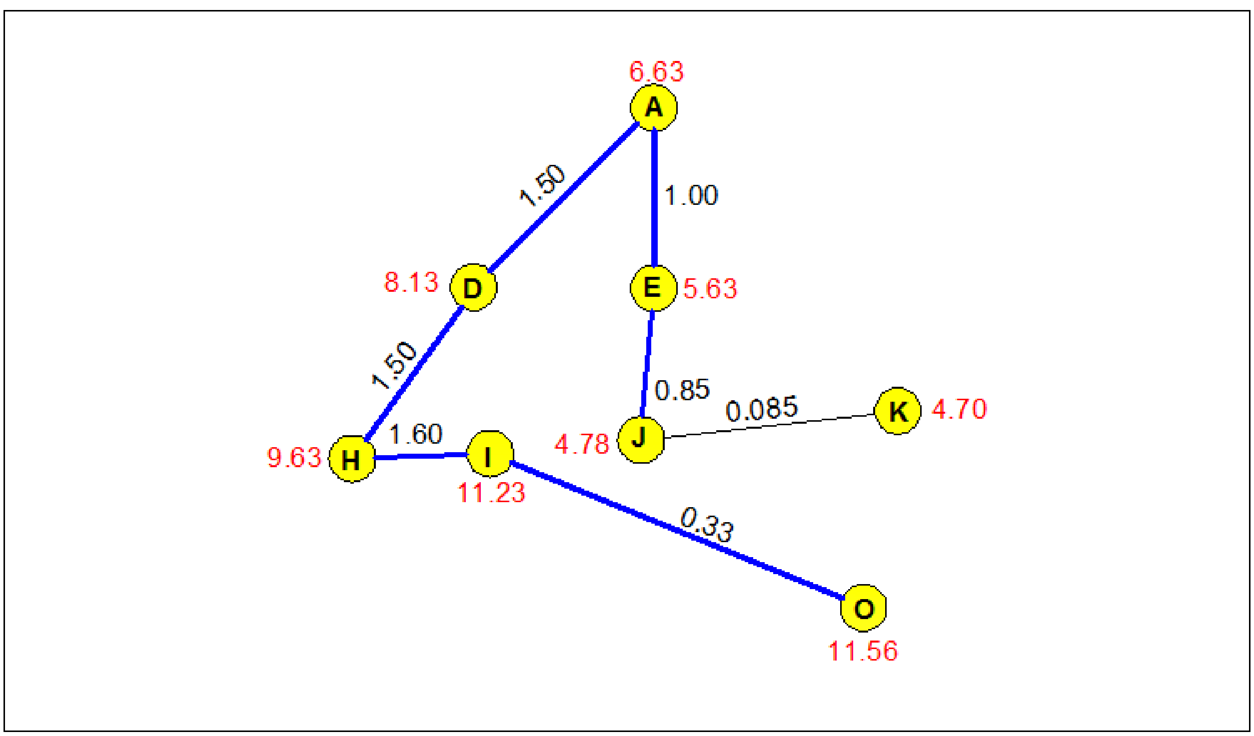



*Figura 4.8.19. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit J zbresim distancën e kulmit fqinjë.

4.78-0.0085=4.70√



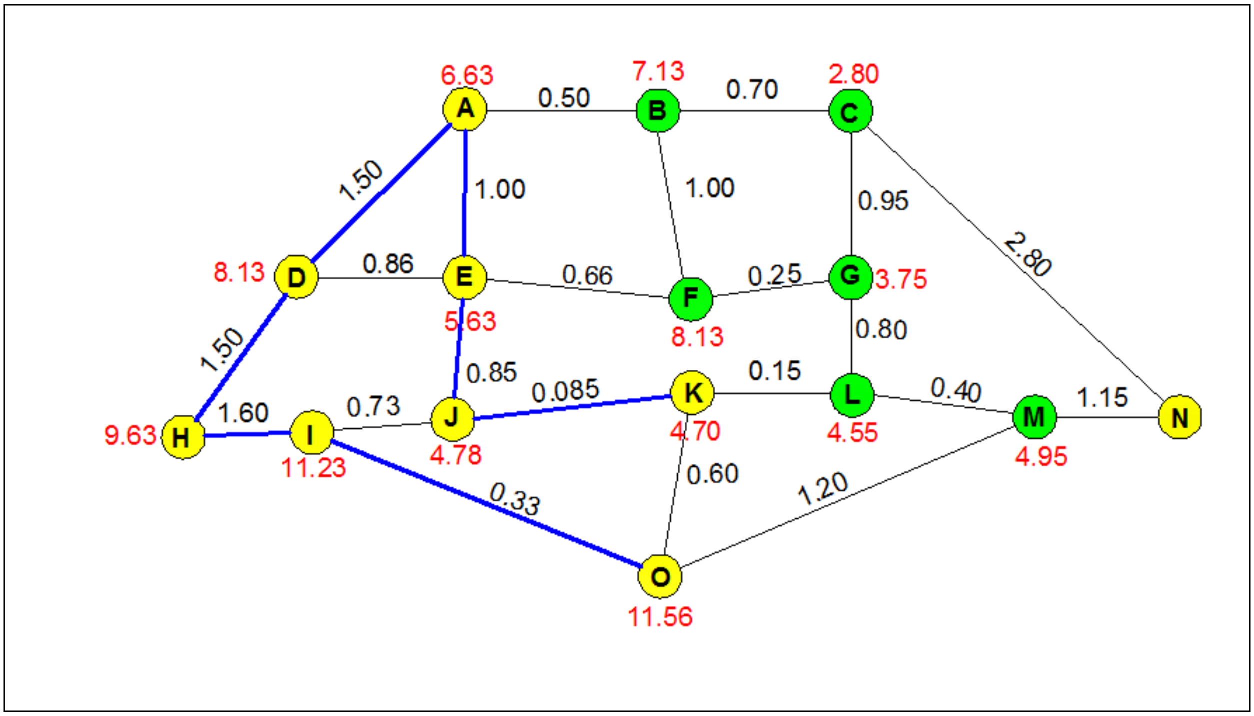
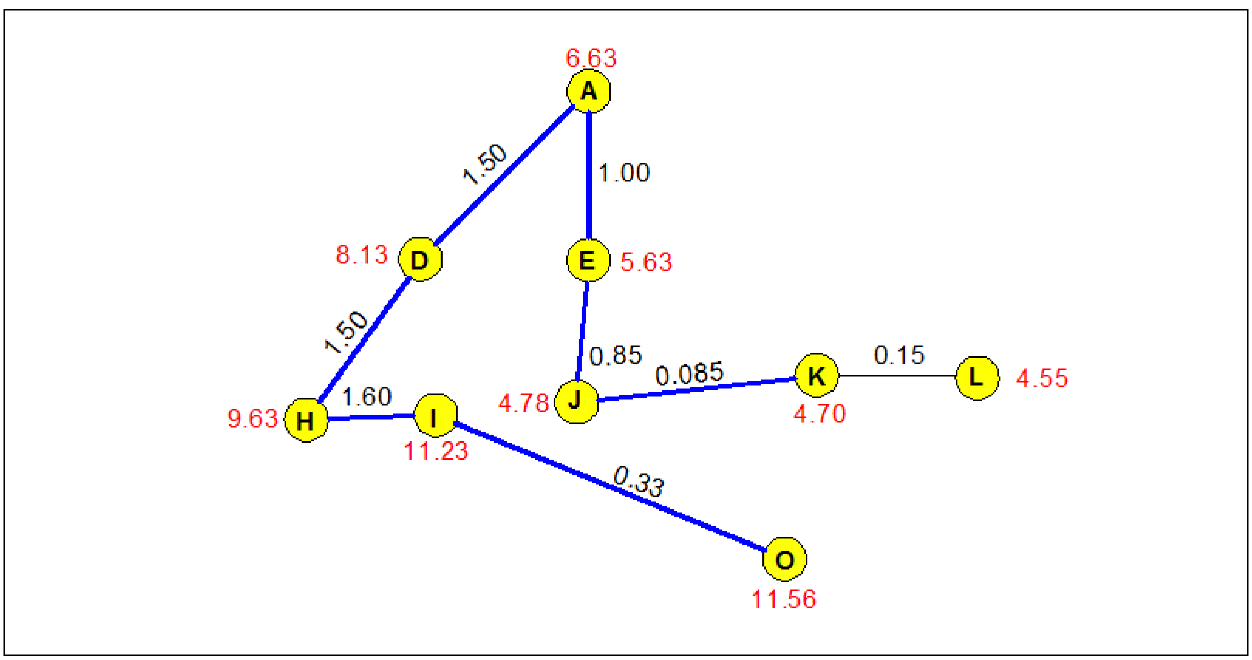



*Figura 4.8.20. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit K zbresim distancën e kulmit fqinjë.

4.70-0.15=4.55√



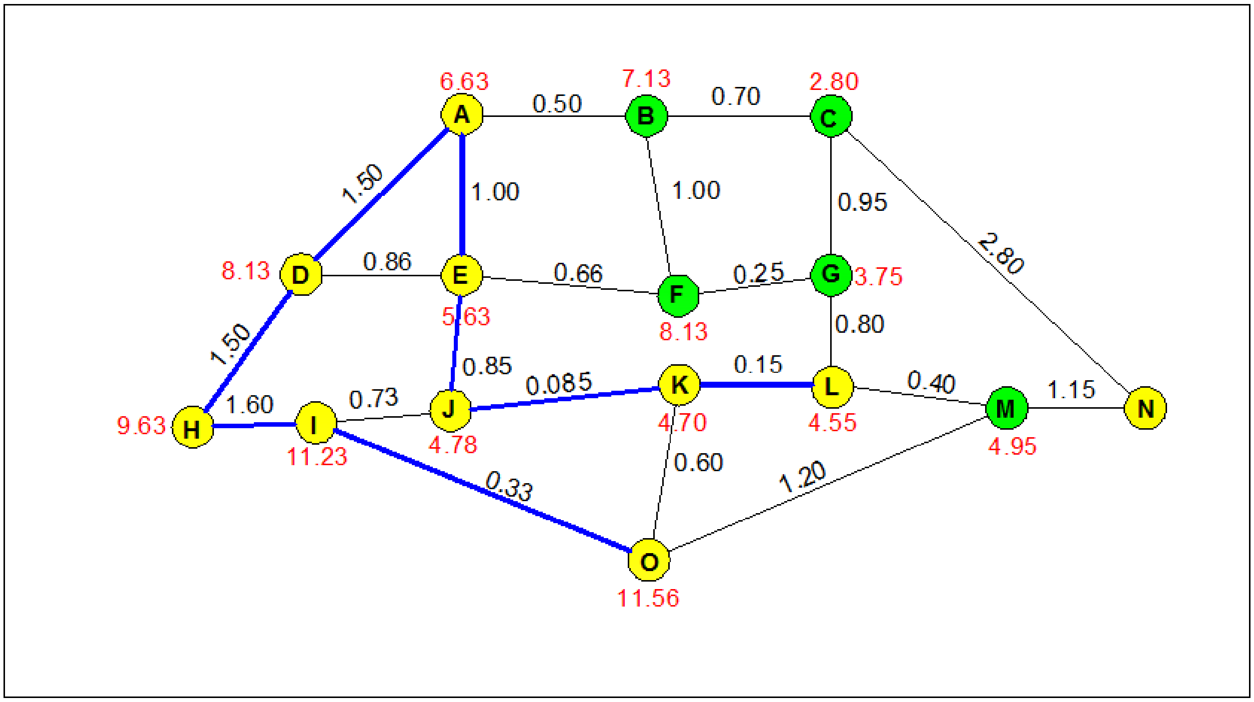
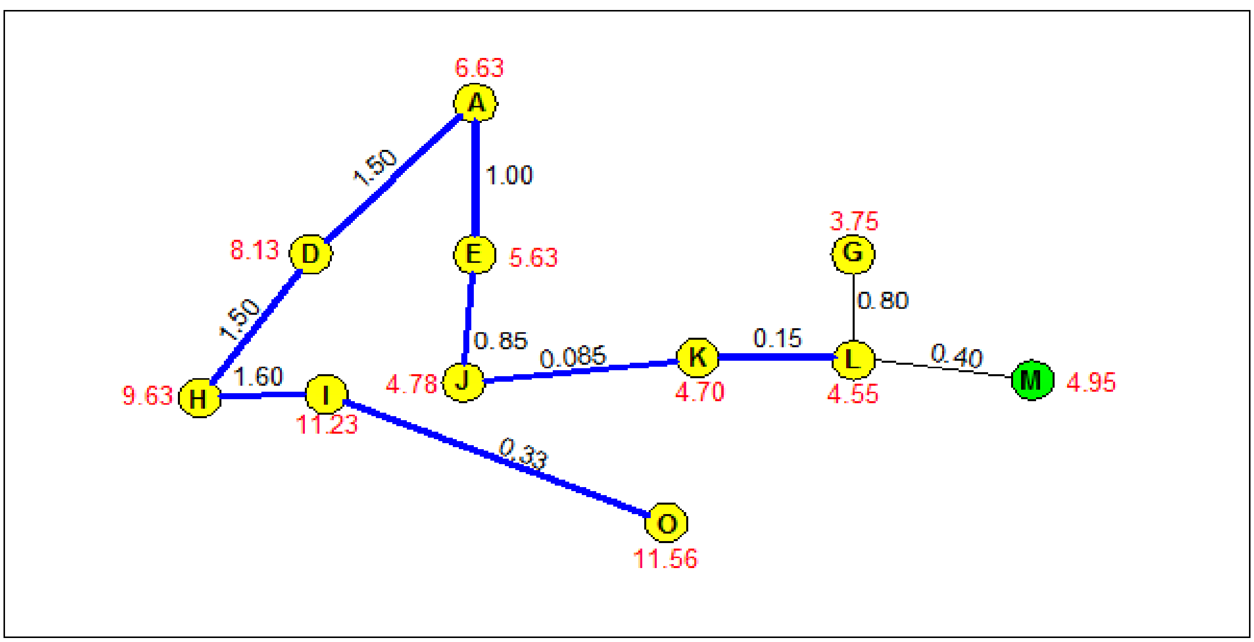



*Figura 4.8.21. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit L zbresim distancën e kulmeve fqinje.

4.55-0.80=3.75√

4.55-0.40≠4.95



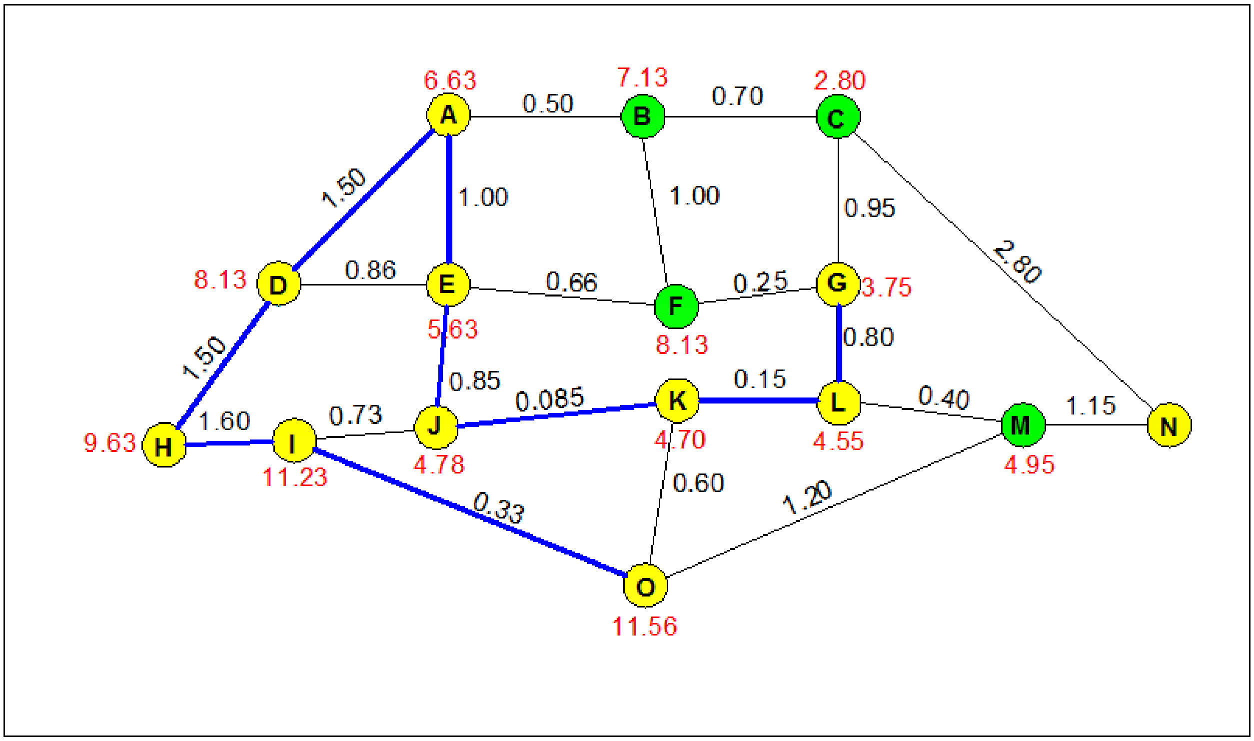
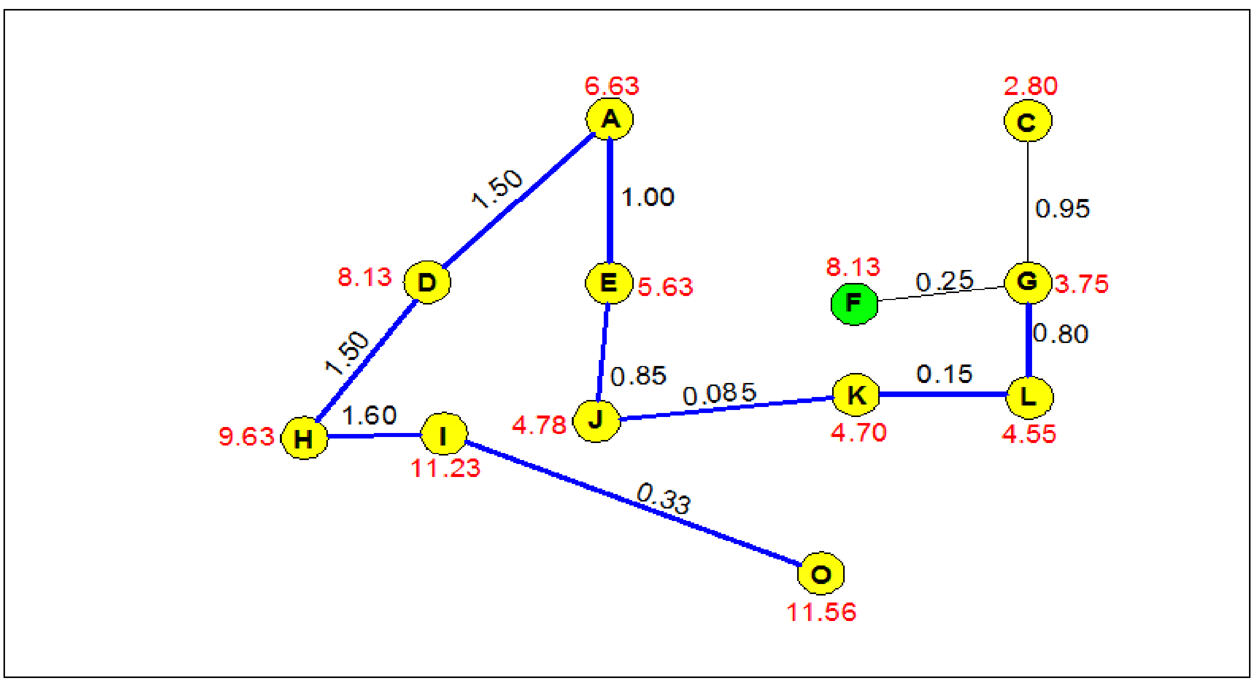



*Figura 4.8.22. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit G zbresim distancën e kulmeve fqinje.

$$3.75-0.95=2.80\surd$$

$$3.75-0.25\neq 8.13$$



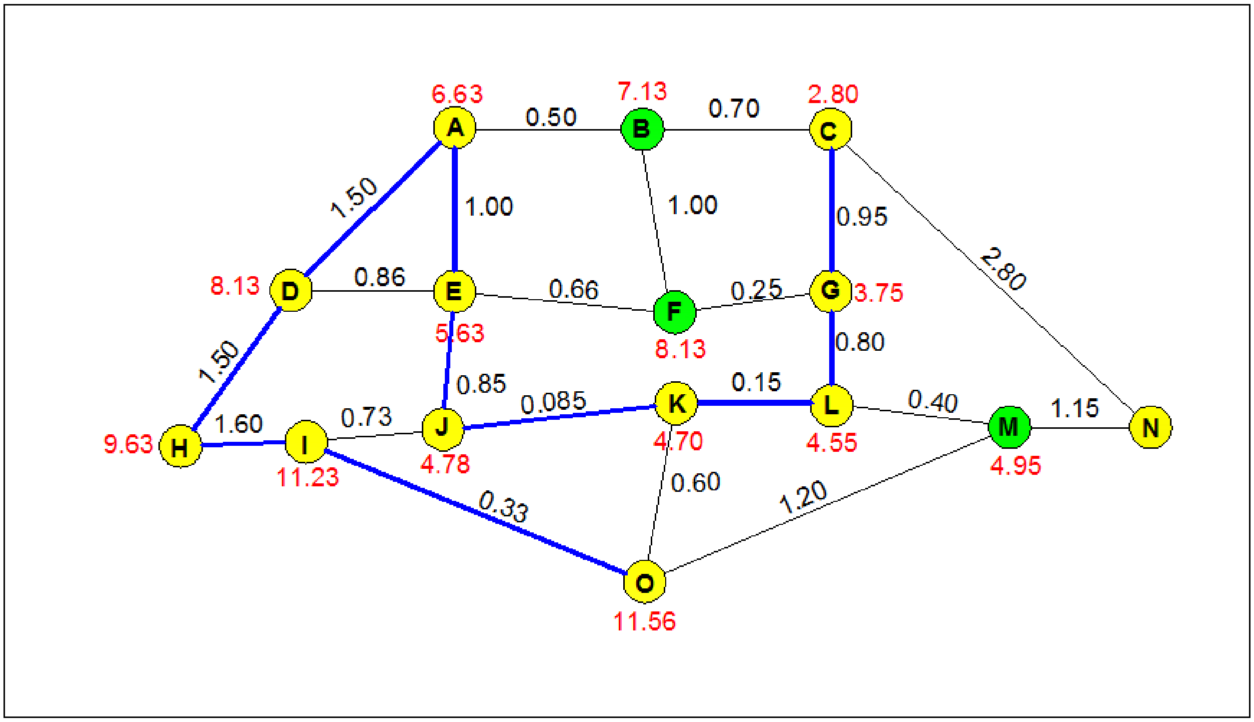
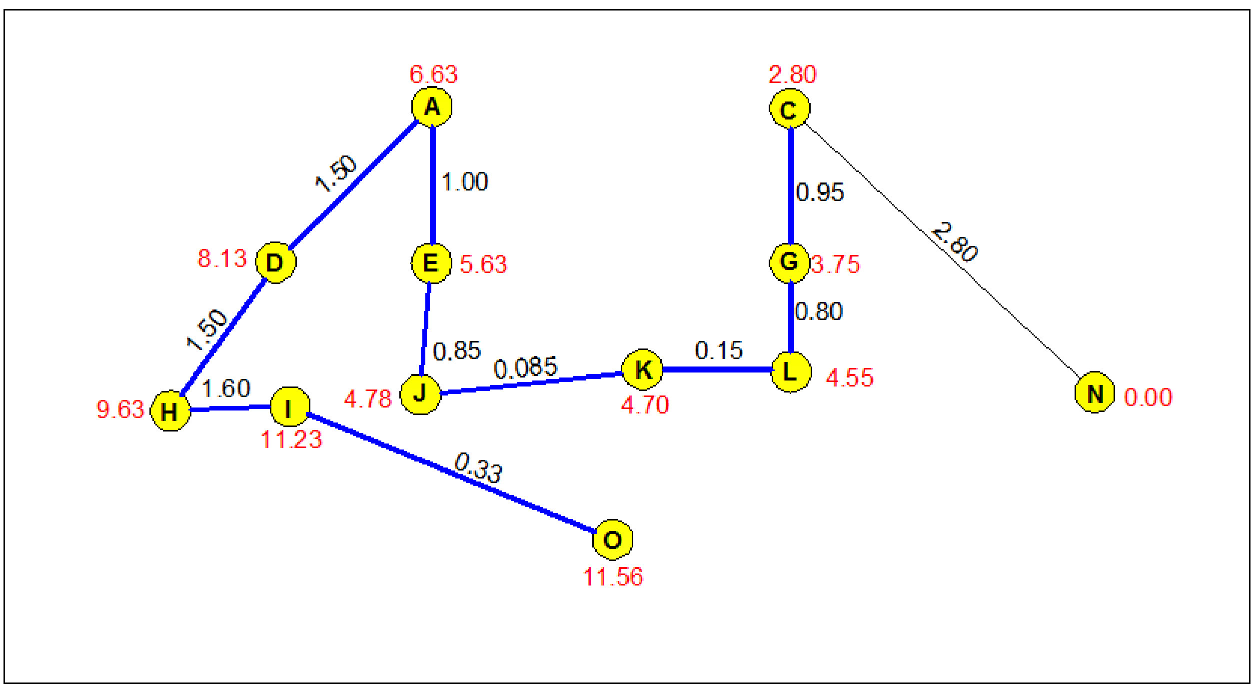



*Figura 4.8.23. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Pastaj prej kulmit C zbresim distancën e kulmit fqinjë.

2.80-2.80=0.00√



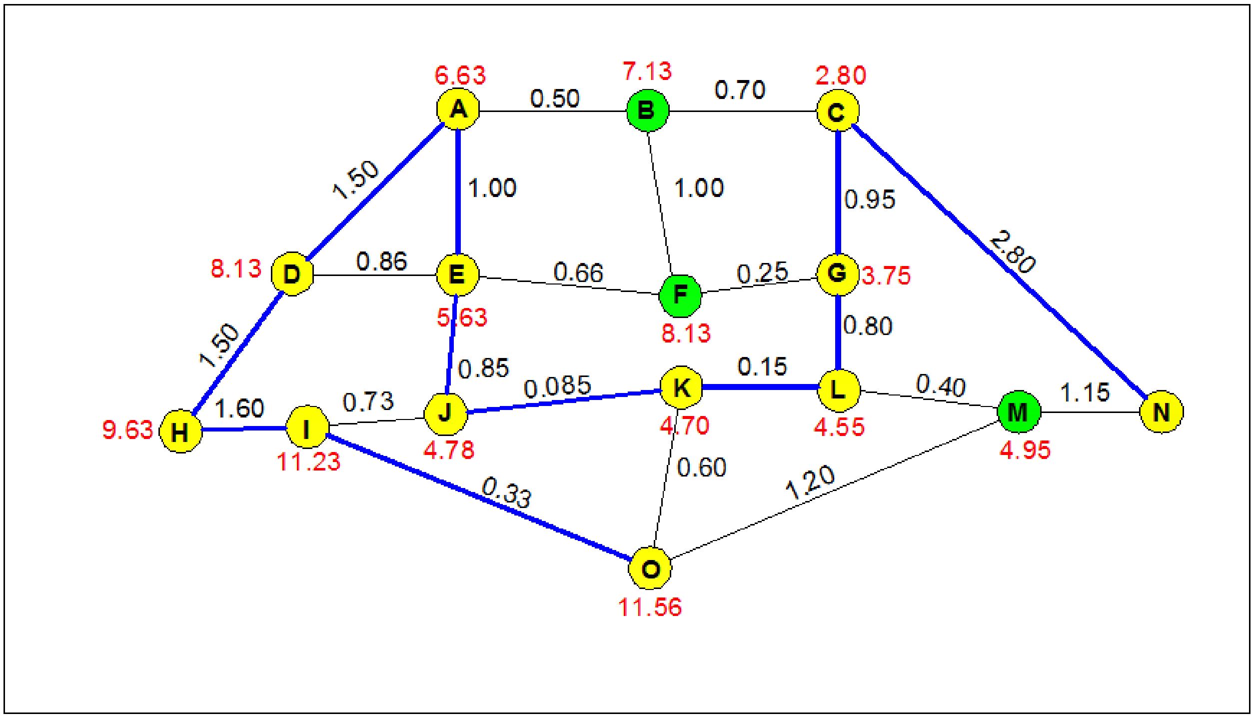



*Figura 4.8.24. Llogaritja e rrugës më të gjatë N-O.*

Rruga me gjatësinë më të gjatë është rruga N-C-G-L-K-J-E-A-D-H-I-O me gjatësi 11.56 [km].

Në figurën më poshtë gjendet rruga më e gjatë prej kulmit N-O e paraqitur në hartë.

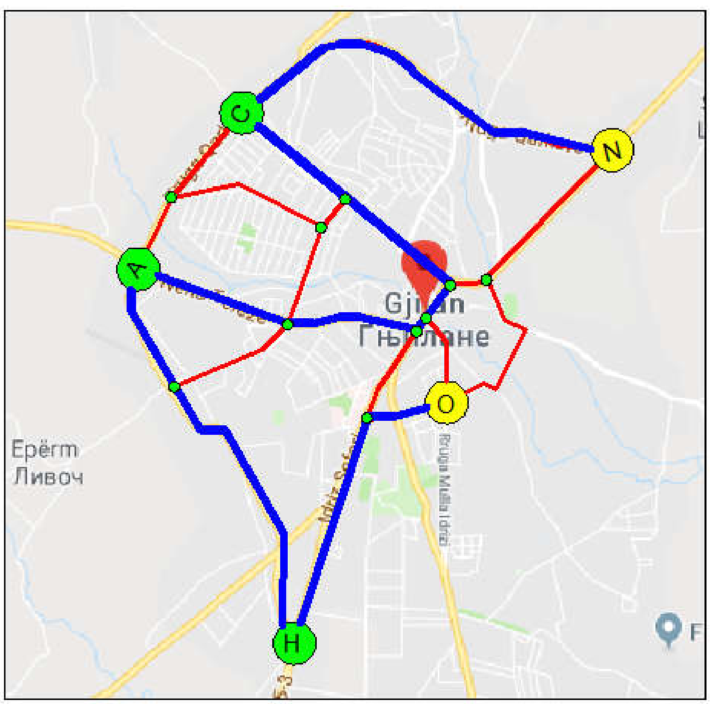


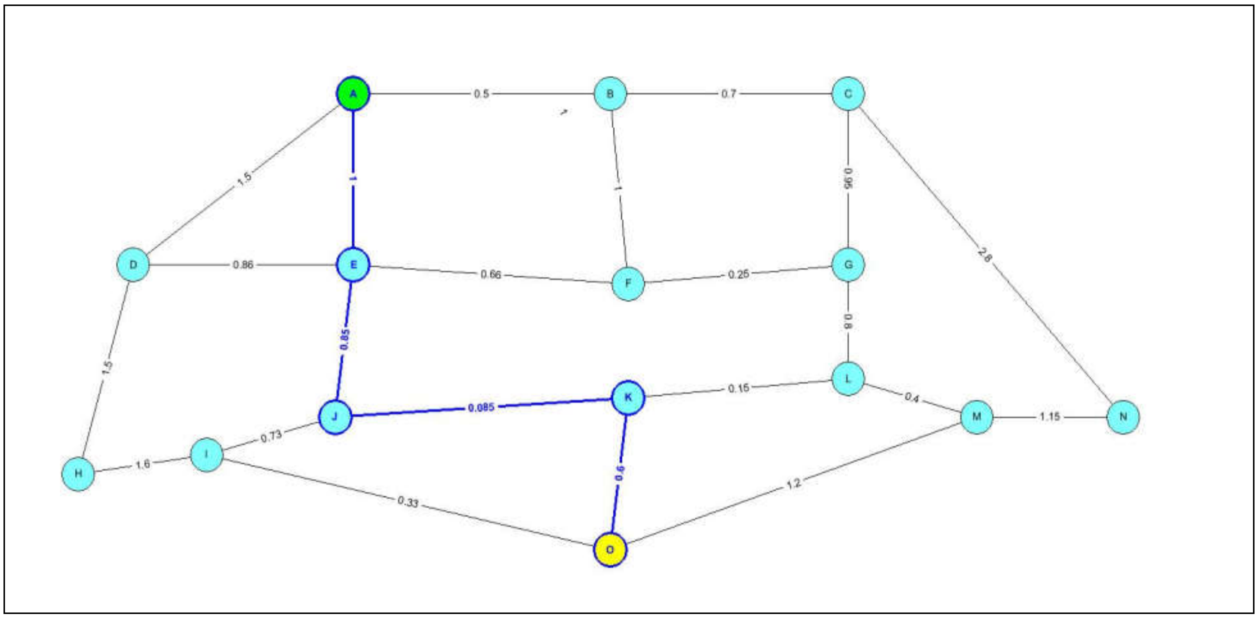

*Figura 4.8.25. Rruga më e gjatë N-O e paraqitur në hartë.*

# 5.0. VERIFIKIMI I REZULTATEVE ME SOFTVERIN MATLAB

Softveri Matlab llogaritet si gjuhë programuese e rendit të lartë dhe është mjaft e përshtatshme për përdorim në inxhinieri në përgjithësi.

Me anë të softverit Matlab janë bërë llogaritjet teknike për katër stacione të ndryshme deri në qendër të qytetit.

a. Llogaritja e rrugës më të shkurtë prej kulmit A-O dhe kosto e shpenzimeve minimale.

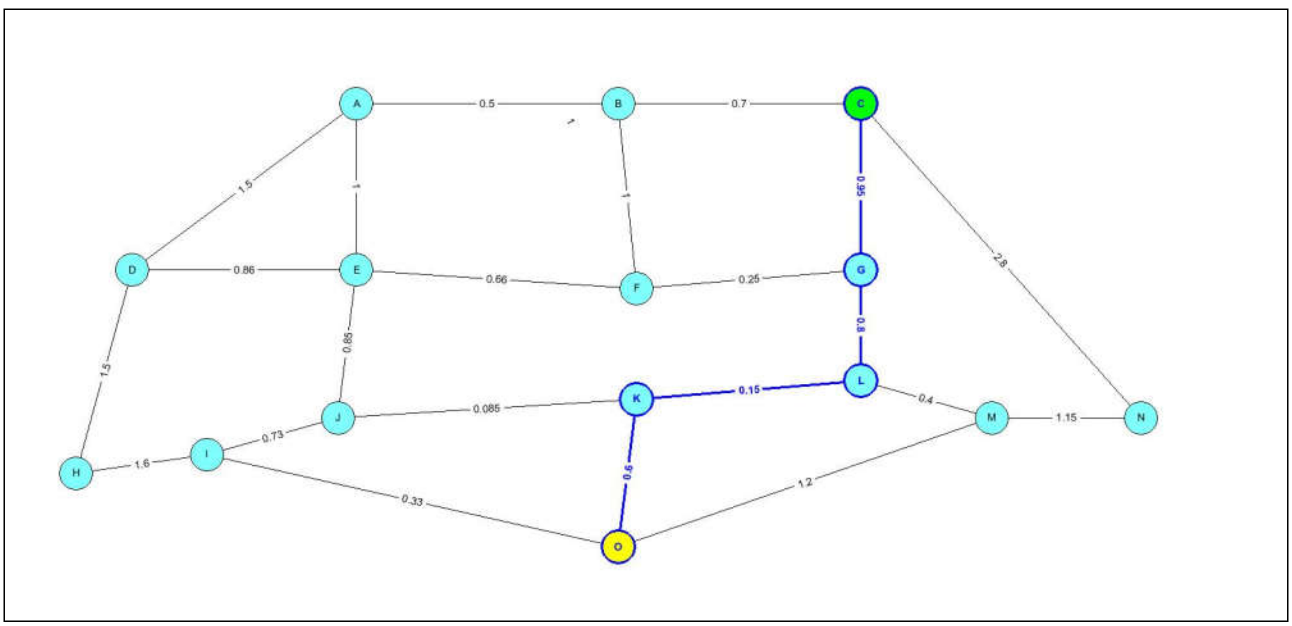



| Distance | | Nodes | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Nodes | A | 0 | 0.5 | | 1.5 | 1 | | | | | | | | | | |
| | B | | 0 | 0.7 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | C | | | 0 | | | | 0.95 | | | | | | | 2.8 | |
| | D | | | | 0 | 0.86 | | | 1.5 | | | | | | | |
| | E | | | | | 0 | 0.66 | | | | 0.85 | | | | | |
| | F | | | | | | 0 | 0.25 | | | | | | | | |
| | G | | | | | | | 0 | | | | | 0.8 | | | |
| | H | | | | | | | | 0 | 1.6 | | | | | | |
| | I | | | | | | | | | 0 | 0.73 | | | | | 0.33 |
| | J | | | | | | | | | | 0 | 0.085 | | | | |
| | K | | | | | | | | | | | 0 | 0.15 | | | 0.6 |
| | L | | | | | | | | | | | | 0 | 0.4 | | |
| | M | | | | | | | | | | | | | 0 | 1.15 | 1.2 |
| | N | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| | O | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Iteration | Nodes | | | | | | | | | | | | | | | Fixed node |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | |
| 1 | 0 (A) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | A |
| 2 | | 0.5 (A) | inf | 1.5 (A) | 1 (A) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | B |
| 3 | | | 1.2 (B) | 1.5 (A) | 1 (A) | 1.5 (B) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | E |
| 4 | | | 1.2 (B) | 1.5 (A) | | 1.5 (B) | inf | inf | inf | 1.85 (E) | inf | inf | inf | inf | inf | C |
| 5 | | | | 1.5 (A) | | 1.5 (B) | 2.15 (C) | inf | inf | 1.85 (E) | inf | inf | inf | 4 (C) | inf | D |
| 6 | | | | | | 1.5 (B) | 2.15 (C) | 3 (D) | inf | 1.85 (E) | inf | inf | inf | 4 (C) | inf | F |
| 7 | | | | | | | 1.75 (F) | 3 (D) | inf | 1.85 (E) | inf | inf | inf | 4 (C) | inf | G |
| 8 | | | | | | | | 3 (D) | inf | 1.85 (E) | inf | 2.55 (G) | inf | 4 (C) | inf | J |
| 9 | | | | | | | | 3 (D) | 2.58 (J) | | 1.935 (J) | 2.55 (G) | inf | 4 (C) | inf | K |
| 10 | | | | | | | | 3 (D) | 2.58 (J) | | | 2.085 (K) | inf | 4 (C) | 2.535 (K) | L |
| 11 | | | | | | | | 3 (D) | 2.58 (J) | | | | 2.485 (L) | 4 (C) | 2.535 (K) | M |
| 12 | | | | | | | | 3 (D) | 2.58 (J) | | | | | 3.635 (M) | 2.535 (K) | O |
| 13 | | | | | | | | 3 (D) | 2.58 (J) | | | | | 3.635 (M) | | I |
| 14 | | | | | | | | 3 (D) | | | | | | 3.635 (M) | | H |
| 15 | | | | | | | | | | | | | | 3.635 (M) | | N |

| Nodes | A | E | J | K | O |
|---|---|---|---|---|---|
| Distances | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Cumulated distance | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |

b. Llogaritja e rrugës më të shkurtë prej kulmit C-O dhe kosto e shpenzimeve minimale.

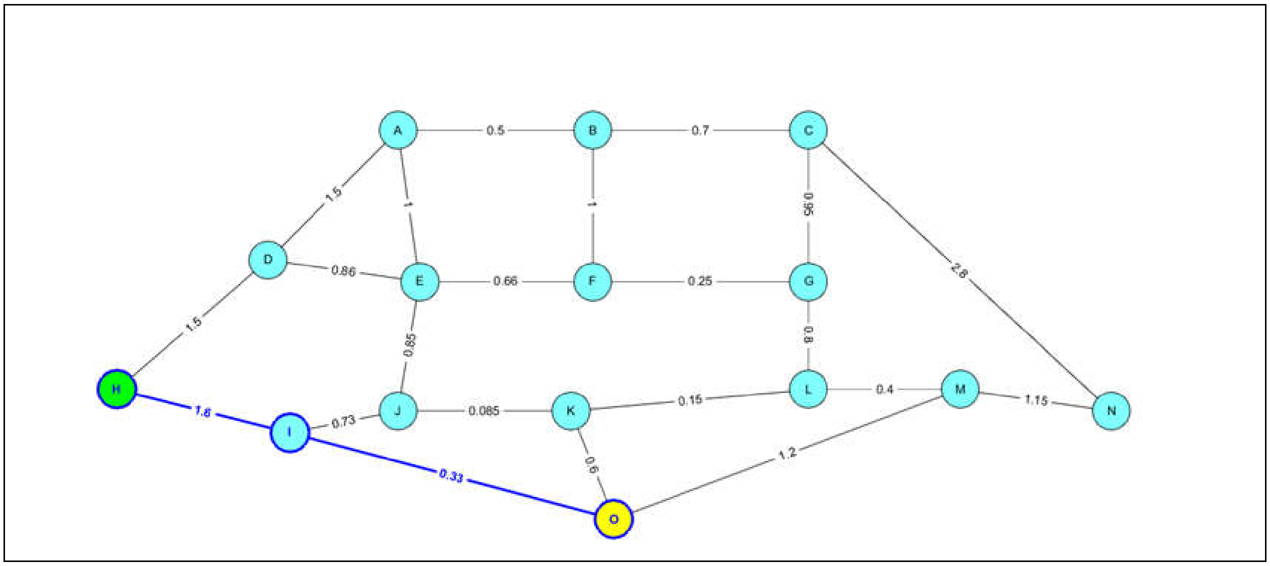


| Distance | | Nodes | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Nodes | A | 0 | 0.5 | | 1.5 | 1 | | | | | | | | | | |
| | B | | 0 | 0.7 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | C | | | 0 | | | | 0.95 | | | | | | | 2.8 | |
| | D | | | | 0 | 0.86 | | | 1.5 | | | | | | | |
| | E | | | | | 0 | 0.66 | | | | 0.85 | | | | | |
| | F | | | | | | 0 | 0.25 | | | | | | | | |
| | G | | | | | | | 0 | | | | | 0.8 | | | |
| | H | | | | | | | | 0 | 1.6 | | | | | | |
| | I | | | | | | | | | 0 | 0.73 | | | | | 0.33 |
| | J | | | | | | | | | | 0 | 0.085 | | | | |
| | K | | | | | | | | | | | 0 | 0.15 | | | 0.6 |
| | L | | | | | | | | | | | | 0 | 0.4 | | |
| | M | | | | | | | | | | | | | 0 | 1.15 | 1.2 |
| | N | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| | O | | | | | | | | | | | | | | | 0 |

| Iteration | Nodes | | | | | | | | | | | | | | | Fixed node |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | |
| 1 | inf | inf | 0 (C) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | C |
| 2 | inf | 0.7 (C) | | inf | inf | inf | 0.95 (C) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | 2.8 (C) | inf | B |
| 3 | 1.2 (B) | | | inf | inf | 1.7 (B) | 0.95 (C) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | 2.8 (C) | inf | G |
| 4 | 1.2 (B) | | | inf | inf | 1.2 (G) | | inf | inf | inf | inf | 1.75 (G) | inf | 2.8 (C) | inf | A |
| 5 | | | | 2.7 (A) | 2.2 (A) | 1.2 (G) | | inf | inf | inf | inf | 1.75 (G) | inf | 2.8 (C) | inf | F |
| 6 | | | | 2.7 (A) | 1.86 (F) | | | inf | inf | inf | inf | 1.75 (G) | inf | 2.8 (C) | inf | L |
| 7 | | | | 2.7 (A) | 1.86 (F) | | | inf | inf | inf | 1.9 (L) | | 2.15 (L) | 2.8 (C) | inf | E |
| 8 | | | | 2.7 (A) | | | | inf | inf | 2.71 (E) | 1.9 (L) | | 2.15 (L) | 2.8 (C) | inf | K |
| 9 | | | | 2.7 (A) | | | | inf | inf | 1.985 (K) | | | 2.15 (L) | 2.8 (C) | 2.5 (K) | J |
| 10 | | | | 2.7 (A) | | | | inf | 2.715 (J) | | | | 2.15 (L) | 2.8 (C) | 2.5 (K) | M |
| 11 | | | | 2.7 (A) | | | | inf | 2.715 (J) | | | | | 2.8 (C) | 2.5 (K) | O |
| 12 | | | | 2.7 (A) | | | | inf | 2.715 (J) | | | | | 2.8 (C) | | D |
| 13 | | | | | | | | 4.2 (D) | 2.715 (J) | | | | | 2.8 (C) | | I |
| 14 | | | | | | | | 4.2 (D) | | | | | | 2.8 (C) | | N |
| 15 | | | | | | | | 4.2 (D) | | | | | | | | H |

| Nodes | C | G | L | K | O |
|---|---|---|---|---|---|
| Distances | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Cumulated distance | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |

c. Llogaritja e rrugës më të shkurtë prej kulmit H-O dhe kosto e shpenzimeve minimale.

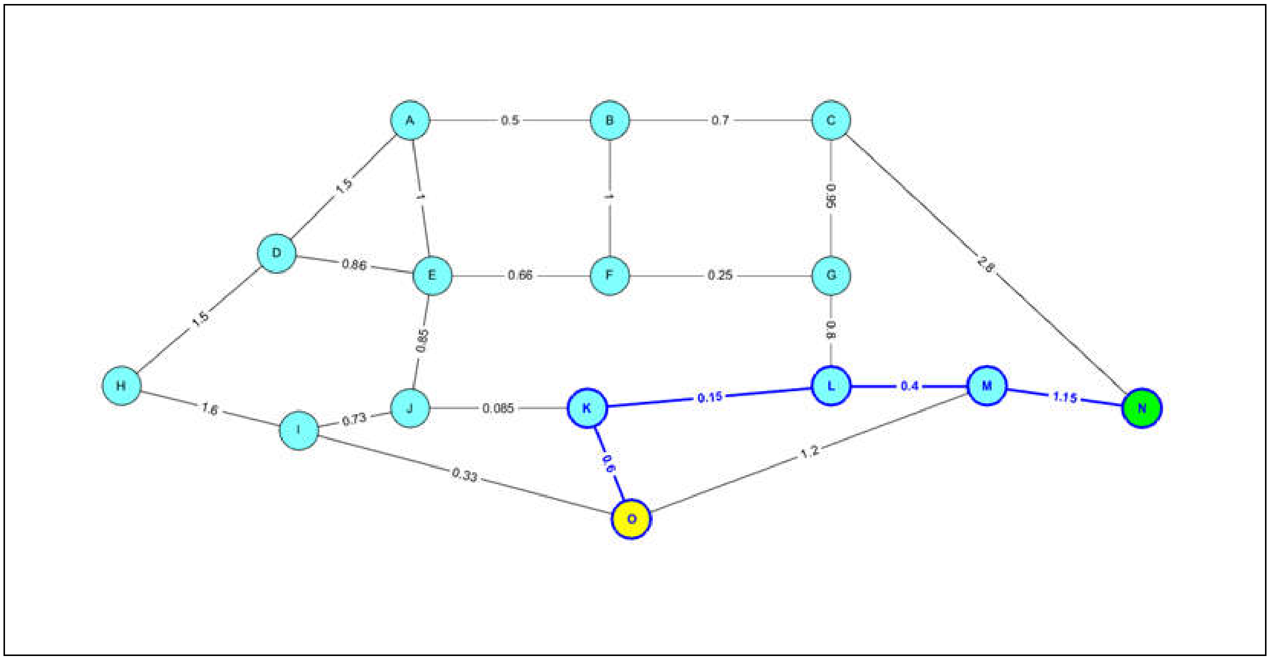



| Distance | | Nodes | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Nodes | A | 0 | 0,5 | | 1,5 | 1 | | | | | | | | | | |
| | B | | 0 | 0,7 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | C | | | 0 | | | | 0,95 | | | | | | | 2,8 | |
| | D | | | | 0 | 0,86 | | | 1,5 | | | | | | | |
| | E | | | | | 0 | 0,66 | | | | 0,85 | | | | | |
| | F | | | | | | 0 | 0,25 | | | | | | | | |
| | G | | | | | | | 0 | | | | | 0,8 | | | |
| | H | | | | | | | | 0 | 1,6 | | | | | | |
| | I | | | | | | | | | 0 | 0,73 | | | | | 0,33 |
| | J | | | | | | | | | | 0 | 0,085 | | | | |
| | K | | | | | | | | | | | 0 | 0,15 | | | 0,6 |
| | L | | | | | | | | | | | | 0 | 0,4 | | |
| | M | | | | | | | | | | | | | 0 | 1,15 | 1,2 |
| | N | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| | O | | | | | | | | | | | | | | | 0 |

| Iteration | Nodes | | | | | | | | | | | | | | | Fixed node |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | |
| 1 | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | 0 (H) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | H |
| 2 | inf | inf | inf | 1.5 (H) | inf | inf | inf | | 1.6 (H) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | D |
| 3 | 3 (D) | inf | inf | | 2.36 (D) | inf | inf | | 1.6 (H) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | I |
| 4 | 3 (D) | inf | inf | | 2.36 (D) | inf | inf | | | 2.33 (I) | inf | inf | inf | inf | 1.93 (I) | O |
| 5 | 3 (D) | inf | inf | | 2.36 (D) | inf | inf | | | 2.33 (I) | 2.53 (O) | inf | 3.13 (O) | inf | | J |
| 6 | 3 (D) | inf | inf | | 2.36 (D) | inf | inf | | | | 2.415 (J) | inf | 3.13 (O) | inf | | E |
| 7 | 3 (D) | inf | inf | | | 3.02 (E) | inf | | | | 2.415 (J) | inf | 3.13 (O) | inf | | K |
| 8 | 3 (D) | inf | inf | | | 3.02 (E) | inf | | | | | 2.565 (K) | 3.13 (O) | inf | | L |
| 9 | 3 (D) | inf | inf | | | 3.02 (E) | 3.365 (L) | | | | | | 2.965 (L) | inf | | M |
| 10 | 3 (D) | inf | inf | | | 3.02 (E) | 3.365 (L) | | | | | | | 4.115 (M) | | A |
| 11 | | 3.5 (A) | inf | | | 3.02 (E) | 3.365 (L) | | | | | | | 4.115 (M) | | F |
| 12 | | 3.5 (A) | inf | | | | 3.27 (F) | | | | | | | 4.115 (M) | | G |
| 13 | | 3.5 (A) | 4.22 (G) | | | | | | | | | | | 4.115 (M) | | B |
| 14 | | | 4.2 (B) | | | | | | | | | | | 4.115 (M) | | N |
| 15 | | | 4.2 (B) | | | | | | | | | | | | | C |

| Nodes | H | I | O |
|---|---|---|---|
| Distances | 0 | 2 | 0 |
| Cumulated distance | 0 | 2 | 2 |

d. Llogaritja e rrugës më të shkurtë prej kulmit N-O dhe kosto e shpenzimeve minimale.




| Distance | | Nodes | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| Nodes | A | 0 | 0,5 | | 1,5 | 1 | | | | | | | | | | |
| | B | | 0 | 0,7 | | | 1 | | | | | | | | | |
| | C | | | 0 | | | | 0,95 | | | | | | | 2,8 | |
| | D | | | | 0 | 0,86 | | | 1,5 | | | | | | | |
| | E | | | | | 0 | 0,66 | | | | 0,85 | | | | | |
| | F | | | | | | 0 | 0,25 | | | | | | | | |
| | G | | | | | | | 0 | | | | | 0,8 | | | |
| | H | | | | | | | | 0 | 1,6 | | | | | | |
| | I | | | | | | | | | 0 | 0,73 | | | | | 0,33 |
| | J | | | | | | | | | | 0 | 0,085 | | | | |
| | K | | | | | | | | | | | 0 | 0,15 | | | 0,6 |
| | L | | | | | | | | | | | | 0 | 0,4 | | |
| | M | | | | | | | | | | | | | 0 | 1,15 | 1,2 |
| | N | | | | | | | | | | | | | | 0 | |
| | O | | | | | | | | | | | | | | | 0 |

| Iteration | Nodes | | | | | | | | | | | | | | | Fixed node |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | |
| 1 | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | 0 (N) | inf | N |
| 2 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | 1.15 (N) | | inf | M |
| 3 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | inf | 1.55 (M) | | | 2.35 (M) | L |
| 4 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | inf | inf | 2.35 (L) | inf | inf | inf | 1.7 (L) | | | | 2.35 (M) | K |
| 5 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | inf | inf | 2.35 (L) | inf | inf | 1.785 (K) | | | | | 2.3 (K) | J |
| 6 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | 2.635 (J) | inf | 2.35 (L) | inf | 2.515 (J) | | | | | | 2.3 (K) | O |
| 7 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | 2.635 (J) | inf | 2.35 (L) | inf | 2.515 (J) | | | | | | | G |
| 8 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | 2.635 (J) | 2.6 (G) | | inf | 2.515 (J) | | | | | | | I |
| 9 | inf | inf | 2.8 (N) | inf | 2.635 (J) | 2.6 (G) | | 4.115 (I) | | | | | | | | F |
| 10 | inf | 3.6 (F) | 2.8 (N) | inf | 2.635 (J) | | | 4.115 (I) | | | | | | | | E |
| 11 | 3.635 (E) | 3.6 (F) | 2.8 (N) | 3.495 (E) | | | | 4.115 (I) | | | | | | | | C |
| 12 | 3.635 (E) | 3.5 (C) | | 3.495 (E) | | | | 4.115 (I) | | | | | | | | D |
| 13 | 3.635 (E) | 3.5 (C) | | | | | | 4.115 (I) | | | | | | | | B |
| 14 | 3.635 (E) | | | | | | | 4.115 (I) | | | | | | | | A |
| 15 | | | | | | | | 4.115 (I) | | | | | | | | H |

| Nodes | N | M | L | K | O |
|---|---|---|---|---|---|
| Distances | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Cumulated distance | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |

# 6.0. PËRFUNDIMI

Arritja dhe qëllimi i këtij punimi ka ardhur si rezultat i analizës dhe përshkrimit të punës në mënyrë të detajuar e algoritmit Kruskal për gjetjen e pemës minimale, dhe algoritmit Dijsktra për gjetjen e zgjidhjes optimale për rrjetin e rrugëve lidhëse deri në qendër të Gjilanit. Këto rezultate janë verifikuar me softverin Matlab.

Gjatë analizës së këtij punimi për gjetjen e pemës minimale duke përshkruar punën e algoritmit Kruskal në rrjetin e rrugëve lidhëse në Gjilan, është gjetur pema minimale me gjatësi 9.035 [km], (*figura 3.14).*

Ndërsa për gjetjen e zgjidhjes optimale për katër stacione të ndryshme deri në qendër të Gjilanit, është analizuar dhe përshkruar në mënyrë të detajuar puna e algoritmit Dijsktra, është gjendur rruga me gjatësi minimale dhe maksimale, dhe kosto e shpenzimeve minimale dhe maksimale.

Për gjetjen e rrugëve me gjatësi minimale me algoritëm Dijsktra janë arritur këto rezultate:

- rruga me gjatësi minimale dhe me kosto të shpenzimeve minimale nga kulmi A-O është rruga me gjatësi 2.53[km], *(figura 4.1.16),*
- rruga me gjatësi minimale dhe me kosto të shpenzimeve minimale nga kulmi C-O është rruga me gjatësi 2.50[km], *(figura 4.2.16),*
- rruga me gjatësi minimale dhe me kosto të shpenzimeve minimale nga pika H-O është rruga me gjatësi 1.93[km], *(figura 4.3.15),* dhe
- rruga me gjatësi minimale dhe me kosto të shpenzimeve minimale nga kulmi N-O është rruga me gjatësi 2.30[km], *(figura 4.4.16).*

Ndërsa për gjetjen e rrugëve me gjatësi maksimale me algoritem Dijsktra janë arritur këto rezultate:

- rruga me gjatësi maksimale dhe me kosto të shpenzimeve maksimale nga kulmi A-O është rruga me gjatësi 13.69[km], *(figura 4.5.24),*
- rruga me gjatësi maksimale dhe me kosto të shpenzimeve maksimale nga kulmi C-O është rruga me gjatësi 12.91[km], *(figura 4.6.26),*

- rruga me gjatësi maksimale dhe me kosto të shpenzimeve maksimale nga kulmi H-O është rruga me gjatësi 12.03[km], *(figura 4.7.24),* dhe
- rruga me gjatësi maksimale dhe me kosto të shpenzimeve maksimale nga kulmi N-O është rruga me gjatësi 11.56[km], *(figura 4.8.24).*

Gjatë analizës së këtij punimi konkludojmë se rruga me gjatësinë më të shkurtë është:

- rruga H-O me gjatësi 1.93 [km],*(figura 4.3.15),*
- rruga N-O me gjatësi 2.30 [km], *(figura 4.4.16),*
- rruga C-O me gjatësi 2.50 [km], *(figura 4.2.16,* dhe
- rruga A-O me gjatësi 2.53 [km], *(figura 4.1.16).*

Ndërsa rruga me gjatësinë më të gjatë është:

- rruga A-O me gjatësi 13.69 [km],*(figura 4.5.24),*
- rruga C-O me gjatësi 12.91 [km], *(figura 4.6.26),*
- rruga H-O me gjatësi 12.03 [km], *(figura 4.7.24),* dhe
- rruga N-O me gjatësi 11.56 [km], *(figura 4.8.24).*

Pas përfundimit të këtij studimi konkludojmë se dallimi në mes algoritmit Kruskal dhe algoritmit Dijsktra është se me anë të algoritmit Dijsktra jo vetëm që mund të gjendet rruga më e shkurtër, por gjithashtu mund të gjenden edhe distancat minimale nga një pikë në secilën pikë tjetër të grafit.

Gjithashtu konkludojmë se për gjetjen e rrugëve më të shkurtra, rezultate të njëjta janë arritur si me algoritëm Dijsktra ashtu dhe me softverin Matlab.

Me anë të algoritmit Dijsktra gjetëm rrugët më të shkurtra për katër stacionet e nisjes për në qendër të qytetit, destinacionin që synonim në rastin e shqyrtuar. Arritëm qëllimin për minimizimin e kostos dhe kjo është po aq pozitive sa edhe koha që kursejmë. Në përfundim të këtij studimi kuptojmë edhe thjeshtësinë e algoritmeve, lehtësinë në përdorim dhe sigurisht rezultate të sakta në fund.

## 7.0. LITERATURA

[1] Dr.Sc. Ramë Likaj. Prof.asc, Kërkimet Operacioanle në Komunikacion, 2012

[2] Dr.Sc. Ramë Likaj. Prof.asc, Zbatimi i teorisë së grafeve në gjetjen e rrugëve optimale për problemin e transportit, 2013,

[3] Dr.Sc. Ramë Likaj, Prof.asc, Application of graph theory to find optimal paths for the transportation problem, 2013,

[4] Haitham Latif Hasan AL-TAMMEMI, Using Dijsktra Algorithm in calculating alternative shortest path for Public Transportation with Transfers and Walking, Jun 2014,

[5] Mehmet Akif, Master Sience, Parallel algorithms for shortes path problem on time dependent graphs, 2012,

[6] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, Graph theory with applications, Departament of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Ontario, Canada,

[7] Ravindrika K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin, THeory, Algorithms, and Applications, Department of Industrial & Management Engineering Indian Institute of Technology, Kanpur,

[8] Melissa Yan, Dijkstra's Algorithm,

[9] Carl Kingsford, Kruskal's Minimum Spanning tree Algorithm and Union-Find Data Structures, jan.21.2013,

[10] Ivana Ognjanoviq, Ramo Shendel. Algoritmet dhe programimi,

[11] http://www.shlplogos.edu.al/wp/wp-content/uploads/2017/10/Revista-studentore-2017.pdf

[12] http://www.bitbit.al/file/245/teori-grafesh.pdf

[13]https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZnNobnN0dWRlbnQuaW5mb3x2Y%20WxiZXItZmVrb2xsYXJpMHxneDo3NmEyZjkyNzYyYmE0NzE

[14] http://www.cs.uml.edu/~giam/91.404/Lectures/Algorithms-Ch23.pdf

[15]http://adiwijaya.staff.telkomuniversity.ac.id/wp-content/uploads/sites/56/2014/02/Network-mathematics-algoritma-MST.pdf

[16]https://www.academia.edu/9709030/Teori_grafesh_bitbit.uni.cc

[17]https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZnNobnN0dWRlbnQuaW5mb3x2Y WxiZXItZmVrb2xsYXJpMHxneDozNjA5YTJjNGU5NzRjMGZm

[18]https://www.scribd.com/doc/284159618/Algoritme-Dhe-Struktura-E-Te-Dhenave-LIBRI